

Гидрометеорология и экология. 2024. № 74. С. 7—25.

Hydrometeorology and Ecology. 2024;(74):7—25

METEOROLOGIA

Научная статья

УДК 551.510.3

doi: 10.33933/2713-3001-2024-74-7-25

Аппроксимация статистических распределений плотности воздуха в приземном слое атмосферы

Егор Викторович Капля

Волгоградский государственный аграрный университет, г. Волгоград,
ev-kaple@yandex.ru

Аннотация. Предложена аппроксимационная функция статистического распределения вероятности плотности воздуха в приземном слое атмосферы. Аппроксимационная функция содержит три параметра и обладает свойством сезонной, суточной и географической универсальности. Выборочные статистические оценки параметров найдены по месячно-часовым выборкам метеорологических данных: температуры и влажности воздуха и атмосферного давления в различных районах приземного слоя атмосферы. Выполнена проверка гипотезы о согласии аппроксимационной функции с эмпирическими распределениями с помощью критериев согласия Пирсона и Колмогорова-Смирнова. Гипотеза о нормальности статистического распределения вероятности плотности атмосферного воздуха в приземном слое атмосферы отвергнута на основе критерия нормальности Харке-Бера.

Ключевые слова: плотность воздуха, аппроксимация статистического распределения, распределение плотности воздуха, приземный слой атмосферы, воздух у поверхности Земли.

Для цитирования: Капля Е. В. Аппроксимация статистических распределений плотности воздуха в приземном слое атмосферы // Гидрометеорология и экология. 2024. № 74. С. 7—25. doi: 10.33933/2713-3001-2024-74-7-25.

METEOROLOGY

Original article

Approximation of the statistical distributions of atmospheric air density in the surface layer

Egor V. Kaplya

Volgograd State Agrarian University, Volgograd Russia, ev-kaple@yandex.ru

Summary. The approximation function of the statistical probability distribution of air density in the surface layer of the atmosphere is proposed. The approximation function contains three parameters and has the property of seasonal, daily and geographical universality. The proposed approximation function

can be applied to statistical distributions of the probability of atmospheric air density in the surface layer in various regions of the Earth. The geographical universality of the new formulas has been verified for empirical statistical distributions of the atmospheric air density calculated on the basis of meteorological data obtained in areas with different types of climate. The seasonal and daily versatility of the new formulas has been verified by meteorological data from airport weather stations at different times of the year and day. The universality of the statistical mathematical model of the atmospheric air density in the surface layer of the atmosphere is achieved using new three-parameter formulas. These formulas are derived on the basis of logistic distributions of type I and II as a result of the introduction of a function that takes one of two values depending on the sign of the sample coefficient of asymmetry (sample skewness) of the empirical probability distribution of atmospheric air density in a given month and hour. Sample statistical estimates of parameters are found for monthly-hourly samples of meteorological data: air temperature and humidity and atmospheric pressure in various places of the surface layer of the atmosphere. The hypothesis of the agreement of the approximation function with empirical distributions was tested using the Pearson and Kolmogorov-Smirnov statistical tests. Empirical statistical distributions constructed on the basis of monthly-hourly samples of air density in the surface layer of the atmosphere have sample skewness and excess kurtosis unequal to zero. The hypothesis of the normality of the statistical probability distribution of atmospheric air density in the surface layer of the atmosphere is rejected on the basis of the Jarque-Bera test of normality distributions.

Keywords: air density, approximation of statistical distribution, distribution of air density, atmospheric surface layer, near-surface air density.

For citation: Капля Е. В. Approximation of the statistical distributions of atmospheric air density in the surface layer. *Gidrometeorologiya i Ekologiya = Journal of Hydrometeorology and Ecology*. 2024;(74):7—25. (In Russ.). doi: 10.33933/2713-3001-2024-74-7-25.

Введение

Плотность воздуха учитывается в динамических моделях атмосферных процессов [1, 2], входит в уравнения динамики взвешенных частиц, загрязняющих атмосферу [3—5], присутствует в статистических расчётных формулах экологически чистой ветроэнергетики [6—9]. В этой статье рассматривается массовая плотность воздуха, которая в практических задачах используется чаще весовой плотности.

Плотность атмосферного воздуха непостоянна во времени и неравномерна в пространстве. Плотность воздуха зависит от температуры, давления, влажности и химического состава воздуха, а также от высоты над уровнем моря.

Датчики метеостанций измеряют атмосферное давление, температуру и влажность воздуха, но не измеряют его плотность. С этим связан недостаток информации о статистических свойствах плотности атмосферного воздуха. Выражения для плотности воздуха, представленные в [10, 11], позволяют вычислить последовательности значений плотности воздуха на основе данных метеорологических станций.

Цели работы:

1. Исследование статистических распределений вероятности плотности атмосферного воздуха в приземном слое на основе выборки температуры и влажности воздуха и атмосферного давления.

2. Аппроксимация статистических распределений вероятности плотности воздуха в приземном слое атмосферы непрерывной гладкой функцией, параметры которой зависят от географического положения и времени.

Расчёт плотности воздуха

Плотность атмосферного воздуха принято вычислять на основе измеренных значений температуры, давления и влажности воздуха. Известно [10, 11] несколько выражений, используемых для расчёта плотности воздуха в атмосфере Земли.

Плотность воздуха в задачах ветроэнергетики определяют в соответствии с действующими российскими и международными стандартами ветроэнергетики по значениям температуры воздуха, атмосферного давления и относительной влажности воздуха с помощью формулы:

$$\rho(T, P_b, H) = \frac{1}{T} \cdot \left(\frac{P_b}{R_0} - H \cdot P_{ws} \cdot \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_{ws}} \right) \right), \quad (1)$$

где T — абсолютная температура воздуха в Кельвинах; P_b — атмосферное барометрическое давление в Паскалях; H — относительная влажность (в диапазоне от 0 до 1); P_{ws} — парциальное давление насыщенного водяного пара в Паскалях; $H \cdot P_{ws}$ — фактическое парциальное давление водяного пара в Паскалях; R_0 — газовая постоянная сухого воздуха, равная 287,05 Дж/(кг · К); R_{ws} — газовая постоянная водяного пара, равная 461,5 Дж/(кг · К).

Атмосферное барометрическое давление воздуха зависит от высоты над уровнем моря и погодных условий. Парциальное давление водяного пара, содержащегося в воздухе, зависит от температуры и влажности воздуха и связано с барометрическим давлением. Плотность влажного воздуха меньше плотности сухого воздуха при тех же показателях температуры и давления.

Парциальное давление насыщенного пара

Парциальное давление насыщенного пара зависит от температуры атмосферного воздуха. Величину парциального давления P_{ws} насыщенного водяного пара в стандартах ветроэнергетики рекомендуют определять с помощью выражения:

$$P_{ws} = 0,0000205 \cdot e^{0,0631846 \cdot T}, \quad \text{для } T > 0, \quad (2)$$

здесь T — абсолютная температура воздуха в Кельвинах; P_{ws} — в Паскалях.

Расчет парциального давления насыщенного водяного пара P_{ws} для соответствующей температуры T выполним с помощью более точной аппроксимационной формулы [10]:

$$P_{ws} = a_1 \cdot EF \cdot \exp\left(\frac{a_2 - T / a_3}{a_4 + T} \cdot T\right), \quad (3)$$

где

$$EF = 1 + k_1 + P_{mb} \cdot (k_2 + k_3 \cdot T^2), \quad (4)$$

P_{mb} — атмосферное давление воздуха в миллибарах; T — температура в градусах Цельсия. Постоянные величины в формуле (3) имеют следующие значения для положительных температур:

$$a_1 = 6,1121; a_2 = 18,678; a_3 = 234,5; a_4 = 257,14;$$

$$k_1 = 7,2 \cdot 10^{-4}; k_2 = 3,2 \cdot 10^{-6}; k_3 = 5,9 \cdot 10^{-10}.$$

Для отрицательных температур:

$$a_1 = 6,1115; a_2 = 23,036; a_3 = 333,7; a_4 = 279,82;$$

$$k_1 = 2,2 \cdot 10^{-4}; k_2 = 3,83 \cdot 10^{-6}; k_3 = 6,4 \cdot 10^{-10}.$$

Осуществим перевод давления P_{mb} из миллибар в Паскали, используя в (4) соотношение $P_{mb} = P_b/100$.

Множитель EF учитывает зависимость парциального давления насыщенного пара от величины атмосферного давления P_{mb} и температуры T в окрестности нормального атмосферного давления. Множитель EF близок к 1, поэтому он может не учитываться в приближённых вычислениях [11], но в следующих расчётах и результатах этот множитель учтён с целью уменьшения риска потери точности.

Группирование метеорологических данных

Исходные данные (временные последовательности температуры, атмосферного давления и относительной влажности воздуха) получены с метеостанций аэропортов [12] в формате METAR в 10-минутном осреднении. Осреднение метеорологических характеристик на 10-минутных отрезках времени устраняет влияние на последующие результаты микромасштабной атмосферной турбулентности и других микромасштабных атмосферных процессов, сопровождающихся флуктуациями метеорологических величин.

Сезонная и суточная изменчивость температуры и влажности [13] атмосферного воздуха приводит к сезонной и суточной изменчивости массовой плотности воздуха, поэтому целесообразно группировать метеорологические данные по номеру месяца и номеру часа в сутках. Сформируем месячно-часовые выборки плотности воздуха. Каждая месячно-часовая выборка содержит множество значений плотности воздуха, усреднённых на 10-минутных отрезках времени в начале заданного часа c (где $c = 0, 1, \dots, 23$) во всех сутках заданного месяца с номером m , где $m = 1, 2, \dots, 12$. Объём месячно-часовых выборок можно увеличить путём включения в их состав значений плотности воздуха разных лет. На основе десятилетних данных (2013—2022 гг.) сформированы месячно-часовые выборки плотности воздуха объёмом 310 — для месяцев, в которых 31 день; выборки объёмом 300 — для месяцев, в которых 30 дней.

Рассмотрим эмпирические статистические распределения (рис. 1—4) плотности воздуха в месячно-часовых выборках, сформированных по описанному выше правилу для 2013—2022 гг. Плотность воздуха в приземном слое атмосферы на уровне моря принимает значения в диапазоне от $1,0 \text{ кг/м}^3$ до $1,5 \text{ кг/м}^3$. Разделим этот отрезок на равные отрезки шириной $\Delta\rho = 0,01 \text{ кг/м}^3$. В этом случае количество отрезков группирования плотности воздуха будет равно $M = 51$. Существует вероятность того, что вычисленное и округлённое значение плотности воздуха

совпадёт с границей двух соседних отрезков. С целью однозначной группировки значений плотности ρ воздуха будем рассматривать полуинтервалы. Каждый полуинтервал с номером i ограничен неравенством:

$$\rho_i - \frac{\Delta\rho}{2} \leq \rho < \rho_i + \frac{\Delta\rho}{2}.$$

В результате группирования расчётных значений плотности воздуха, вычисленных с помощью формул (1), (3), (4) по данным [12] метеостанций аэропортов Волгограда, Хабаровска, Мурманска и Сочи, построены гистограммы эмпирических распределений вероятности плотности воздуха в разное время года и суток (m — номер месяца, c — номер часа).

На рис. 1—4 отмечены величины: $\rho_{sa} = 1,225 \text{ кг/м}^3$ — стандартная плотность воздуха на уровне моря, которая соответствует плотности сухого воздуха при 15°C и давлении 101330 Па (в соответствии с Международной стандартной атмосферой); $\rho_0 = 1,204 \text{ кг/м}^3$ — плотность сухого воздуха при нормальных условиях (температуре 20°C и давлении 101325 Па).

Гистограммы (рис. 1—4) эмпирических распределений вероятности плотности атмосферного воздуха обладают чётко выраженной асимметрией, поэтому аппроксимация таких распределений симметричными статистическими законами (например, нормальным законом или законом Лапласа) в рассмотренных типичных примерах приводит к большим погрешностям аппроксимации.

Количественной мерой асимметрии (скошенности) статистического распределения является коэффициент асимметрии — безразмерная характеристика несимметричности распределения. Все симметричные распределения имеют нулевой коэффициент асимметрии.

Асимметрия эмпирических распределений

Выборочный коэффициент асимметрии (ВКА) — эмпирическая характеристика асимметрии распределения. ВКА вычисляют с помощью формулы [14], которая применительно к месячно-часовым выборкам плотности воздуха принимает вид:

$$S_{m,c} = \frac{\frac{1}{N_{m,c}} \cdot \sum_{n=1}^{N_{m,c}} (\rho_n - \overline{\rho_{m,c}})^3}{\left[\frac{1}{N_{m,c}} \cdot \sum_{n=1}^{N_{m,c}} (\rho_n - \overline{\rho_{m,c}})^2 \right]^{3/2}}, \quad (5)$$

где: $S_{m,c}$ — ВКА месячно-часовой выборки плотности воздуха; $N_{m,c}$ — объём месячно-часовой выборки плотности воздуха, т. е. количество экспериментальных значений плотности воздуха, соответствующих месяцу m и часу c ; n — номер элемента месячно-часовой выборки; ρ_n — плотность воздуха (элемент месячно-часовой выборки); $\overline{\rho_{m,c}}$ — среднее арифметическое (многолетнее) значение плотности воздуха в заданном месяце и в заданный час суток.

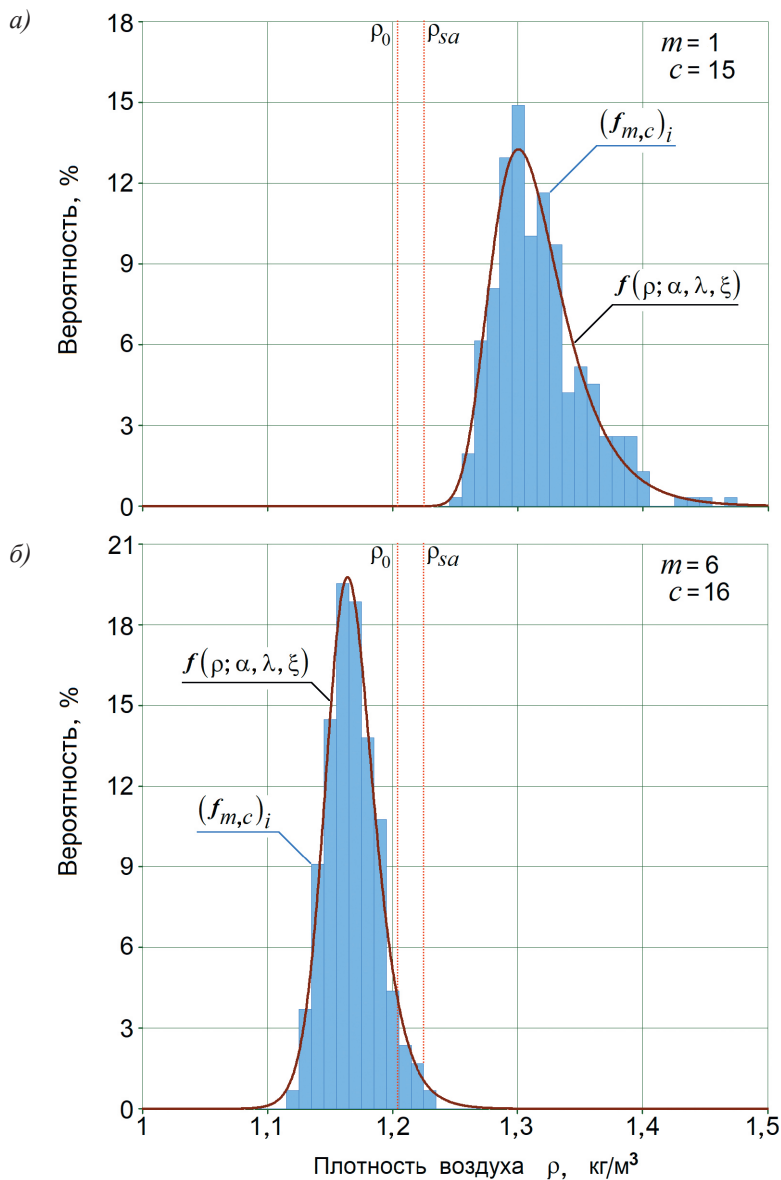


Рис. 1. Нормированные столбчатые гистограммы статистического распределения плотности атмосферного воздуха и графики аппроксимационной функции (9), построенные на основе месячно-часовых выборок 2013—2022 гг. метеостанции аэропорта г. Волгограда (UTC+3): а) $m = 1$, $c = 15$; б) $m = 6$, $c = 16$.

Fig. 1. Normalized columnar histograms of the statistical distribution of atmospheric air density and graphs of the approximation function (9), based on monthly-hourly samples from 2013—2022 of the Volgograd airport weather station (UTC+3): а) $m = 1$, $c = 15$; б) $m = 6$, $c = 16$.

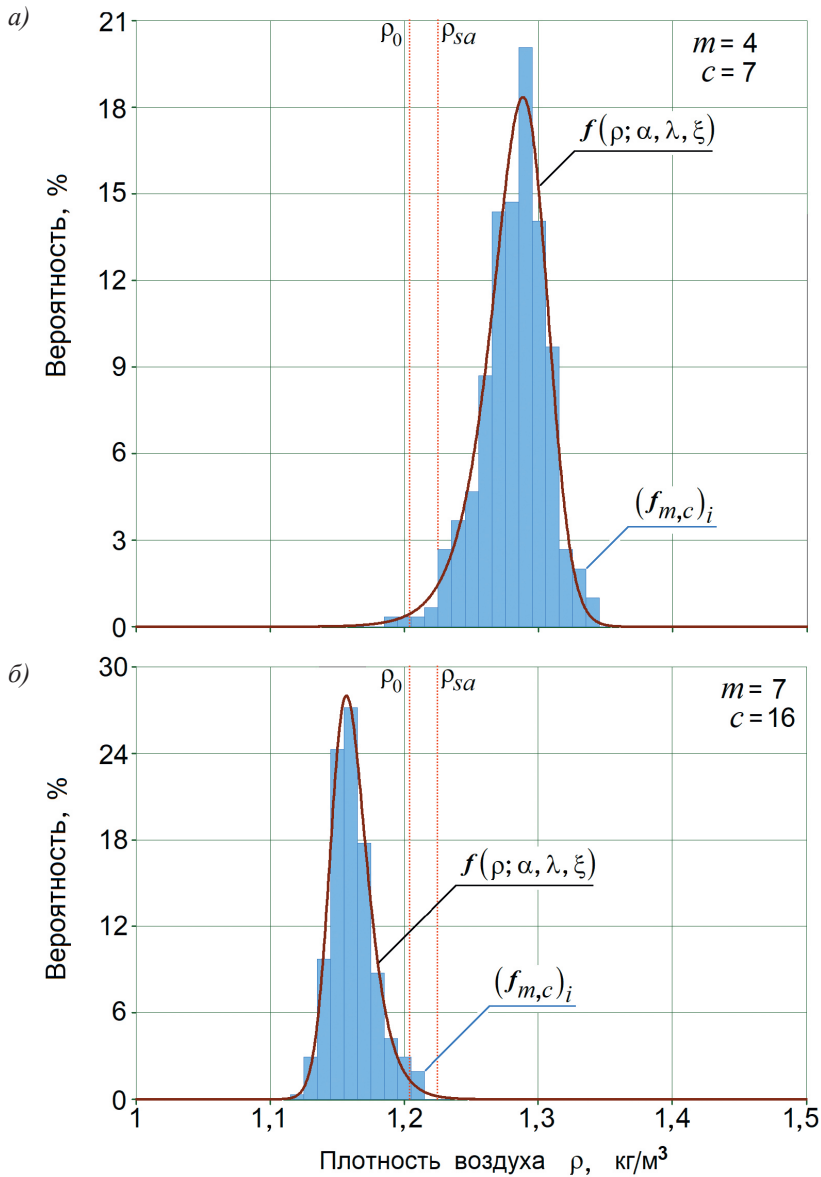


Рис. 2. Нормированные столбчатые гистограммы статистического распределения плотности атмосферного воздуха и графики аппроксимационной функции (9), построенные на основе месячно-часовых выборок 2013—2022 гг. метеостанции аэропорта г. Хабаровска (UTC+10): а) $m = 4$, $c = 7$; б) $m = 7$, $c = 16$.

Fig. 2. Normalized columnar histograms of the statistical distribution of atmospheric air density and graphs of the approximation function (9), based on monthly-hourly samples from 2013—2022 of the Khabarovsk airport weather station (UTC+10): а) $m = 4$, $c = 7$; б) $m = 7$, $c = 16$.

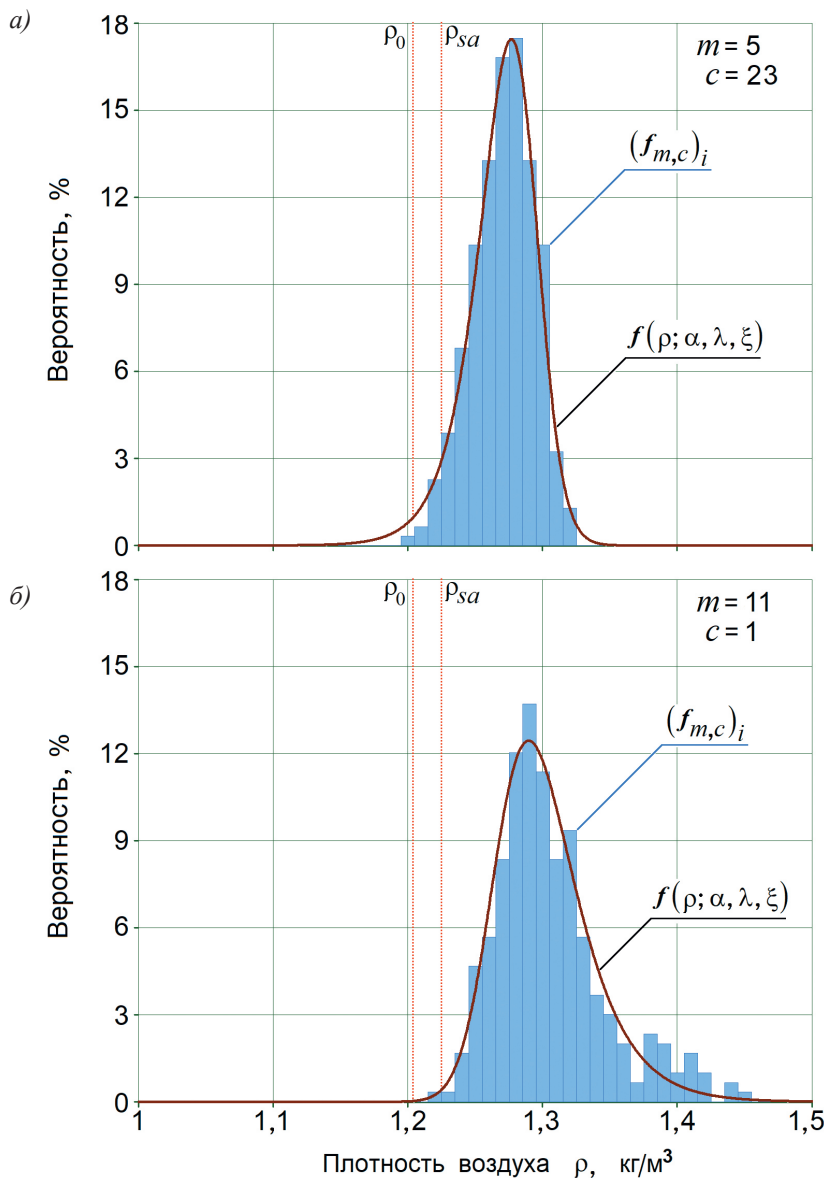


Рис. 3. Нормированные столбчатые гистограммы статистического распределения плотности атмосферного воздуха и графики аппроксимационной функции (9), построенные на основе месячно-часовых выборок 2013—2022 гг. метеостанции аэропорта г. Мурманска (UTC+3): а) $m = 5$, $c = 23$; б) $m = 11$, $c = 1$.

Fig. 3. Normalized columnar histograms of the statistical distribution of atmospheric air density and graphs of the approximation function (9), based on monthly-hourly samples from 2013—2022 of the Murmansk airport weather station (UTC+3): а) $m = 5$, $c = 23$; б) $m = 11$, $c = 1$.

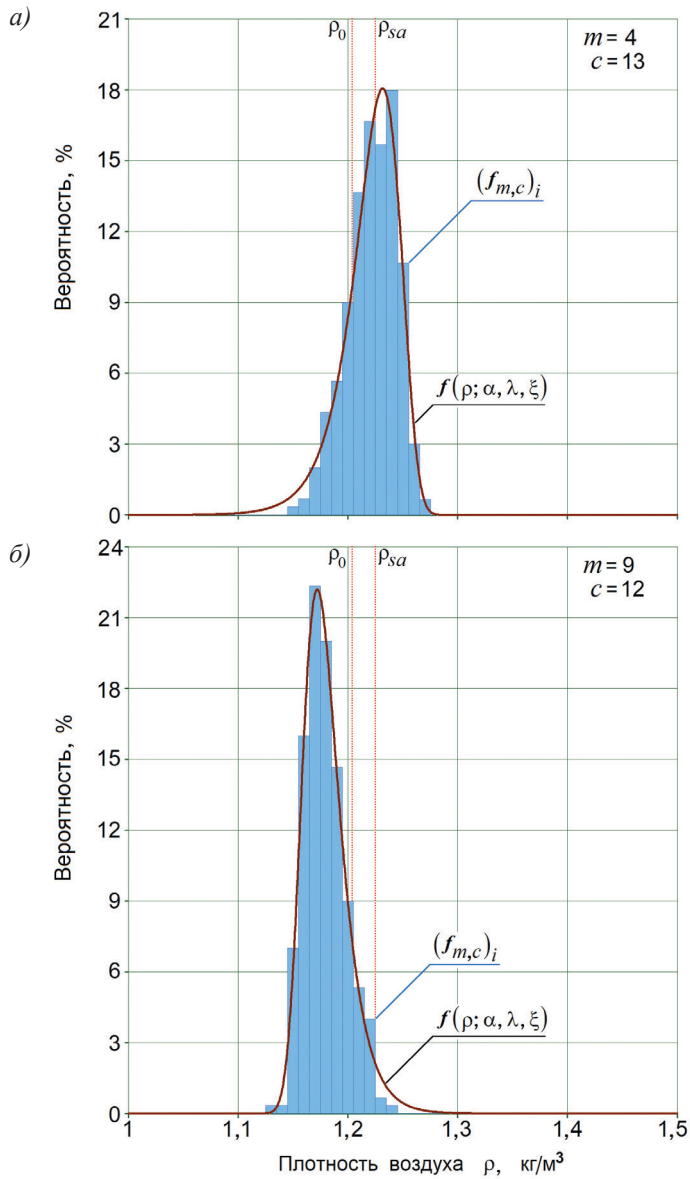


Рис. 4. Нормированные столбчатые гистограммы статистического распределения плотности атмосферного воздуха и графики аппроксимационной функции (9), построенные на основе месячно-часовых выборок 2013—2022 гг. метеостанции аэропорта г. Сочи (UTC+3): а) $m = 4$, $c = 13$; б) $m = 9$, $c = 12$.

Fig. 4. Normalized columnar histograms of the statistical distribution of atmospheric air density and graphs of the approximation function (9), based on monthly-hourly samples from 2013—2022 of the Sochi airport weather station (UTC+3): а) $m = 4$, $c = 13$; б) $m = 9$, $c = 12$.

ВКА статистических распределений, построенных по месячно-часовым выборкам (2013–2022 гг.) плотности воздуха в аэропорту Волгограда, варьируется от $-0,095$ до $0,990$. Наибольшие значения ВКА наблюдаются в Волгограде в зимние месяцы, минимальные — в апреле и в мае.

В районах с континентальным климатом преобладающее количество элементов матрицы $S_{m,c}$ положительны. Высокий по модулю уровень ВКА свидетельствует об асимметрии (скошенности) статистического распределения плотности воздуха. Аппроксимация скошенных эмпирических распределений нормальным распределением или другим симметричным распределением (например, распределением Лапласа) некорректна. Идентификация статистического закона распределения выполняется на основе вычисления нескольких характеристик, среди которых ВКА и ВКЭ.

Экссесс эмпирических распределений

Выборочный коэффициент эксцесса (ВКЭ) — количественная характеристика острровершинности эмпирического распределения. Избыточный ВКЭ вычисляют с помощью формулы [14], которая применительно к месячно-часовым выборкам плотности воздуха принимает вид:

$$K_{m,c} = \frac{\frac{1}{N_{m,c}} \cdot \sum_{n=1}^{N_{m,c}} (\rho_n - \overline{\rho_{m,c}})^4}{\left[\frac{1}{N_{m,c}} \cdot \sum_{n=1}^{N_{m,c}} (\rho_n - \overline{\rho_{m,c}})^2 \right]^2} - 3, \quad (6)$$

где $K_{m,c}$ — избыточный ВКЭ месячно-часовой выборки плотности воздуха в приземном слое атмосферы в заданный месяц и заданный час суток.

ВКЭ эмпирических статистических распределений, построенных по месячно-часовым выборкам (2013—2022 гг.) плотности воздуха в приземном слое по данным метеостанции аэропорта Волгограда, варьируется от $-0,700$ до $1,824$.

Высокий уровень эксцесса — признак несоответствия эмпирического распределения плотности воздуха в месячно-часовых выборках нормальному закону распределения, так как нормальное распределение имеет нулевой эксцесс. Аппроксимацию эмпирического распределения плотности воздуха целесообразно осуществлять на основе функции с варьируемым коэффициентом эксцесса.

С целью строгой проверки гипотезы о нормальности распределения необходимо проведение статистического теста с проверкой критерия нормальности, основанного на величинах ВКЭ и ВКА.

Тест на нормальность эмпирических статистических распределений

Статистический критерий Харке-Бера — критерий для проверки совместной нулевой гипотезы о том, что асимметрия и избыточный эксцесс случайной величины в заданной выборке равны нулю [15]. Критерий позволяет подтвердить или

отвергнуть гипотезу о нормальности статистического распределения случайной величины на основе величины эксцесса и величины асимметрии эмпирического распределения, построенного на основе экспериментальной выборки.

Критерий Харке-Бера для проверки нормальности эмпирических статистических распределений учитывает коэффициенты асимметрии и эксцесса эмпирических распределений. Этот критерий рекомендовано [16] применять для проверки нормальности статистических распределений гидрометеорологических величин.

Статистика Харке-Бера строится [15] на основе выборочных оценок эксцесса и асимметрии. Применим аналогичное матричное выражение на основе матриц коэффициентов асимметрии и эксцесса, соответствующих месячно-часовым выборкам плотности воздуха, для формирования матрицы тестовых статистик, соответствующих тем же выборкам:

$$J_{m,c} = \frac{N_{m,c}}{6} \cdot \left(S_{m,c}^2 + \frac{K_{m,c}^2}{4} \right), \quad (7)$$

здесь: $J_{m,c}$ — тестовая статистика для проверки нормальности распределения, соответствующего месячно-часовой выборке заданного месяца и часа.

Статистика J имеет распределение хи-квадрат с двумя степенями свободы. Статистика J , построенная на основе данных, соответствующих нормальному закону распределения, асимптотически стремится к распределению хи-квадрат с двумя степенями свободы. Основным недостатком критерия Харке-Бера является медленная асимптотическая сходимость тестовой статистики, поэтому для проверки нормальности распределений на основе квантильной функции распределения хи-квадрат необходимо иметь экспериментальные выборки объёмом $N_{m,c} \geq 200$. Все анализируемые выборки с большим запасом удовлетворяют указанному условию и, следовательно, считаются представительными.

Критическое значение \tilde{J} статистики критерия Харке-Бера равно квантилю $q\chi^2(\tilde{p}, \nu)$ распределения хи-квадрат [15] с доверительной вероятностью \tilde{p} и числом степеней свободы $\nu = 2$. Гипотеза о нормальности статистического распределения случайной величины на основе величины эксцесса и величины асимметрии эмпирического распределения считается подтверждённой, если выполняется условие:

$$J_{m,c} < \tilde{J}. \quad (8)$$

Условие (8) не выполняется почти для всех месячно-часовых выборок плотности воздуха в приземном слое атмосферы с доверительной вероятностью $\tilde{p} = 99\%$ и, следовательно, статистические распределения вероятности плотности воздуха в месячно-часовых выборках не являются нормальными.

Аппроксимация эмпирических распределений плотности воздуха

Переход от дискретных эмпирических распределений вероятности к непрерывным теоретическим распределениям можно осуществить путём аппроксимации

эмпирических распределений гладкими непрерывными функциями, удобными при интегрировании.

Эмпирические распределения вероятности плотности воздуха в месячно-часовых выборках будем аппроксимировать функцией статистической плотности вероятности следующего вида:

$$f(\rho; \alpha, \lambda, \xi) = \frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{\exp\left(-k(\alpha) \cdot \frac{\rho - \xi}{\lambda}\right)}{\left[1 + \exp\left(-\frac{\rho - \xi}{\lambda}\right)\right]^{\alpha+1}}, \quad (9)$$

где α — безразмерный параметр формы; λ — параметр масштаба; ξ — параметр смещения. Параметры λ и ξ имеют размерность плотности ($\text{кг}/\text{м}^3$).

Частными случаями формулы (9) являются обобщенные логистические распределения типа I и II, описанные в [17, 18]. Обобщенные логистические распределения типа I и II представляют особый интерес, поскольку имеют вариабельный коэффициент асимметрии и позволяют учесть асимметрию данных. Коэффициент асимметрии распределения, заданного функцией (9), варьируется на отрезке от -2 до $+2$. Этот отрезок включает в себя диапазон расчётных значений выборочного коэффициента асимметрии эмпирических распределений вероятности плотности воздуха в приземном слое атмосферы.

Безразмерная функция $k(\alpha)$ определяет тип обобщённого логистического распределения (I или II). Функция $k(\alpha)$ принимает одно из двух значений в зависимости от знака коэффициента s асимметрии эмпирического статистического распределения вероятности плотности воздуха. Функцию $k(\alpha)$ представим в следующем виде:

$$k(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } S_{m,c} \geq 0; \\ \alpha, & \text{если } S_{m,c} < 0; \end{cases}$$

где $S_{m,c}$ — коэффициент асимметрии эмпирического статистического распределения вероятности плотности воздуха в месяце с номером m в час с номером c . При $S_{m,c} > 0$ наиболее вероятное значение плотности воздуха меньше среднего значения плотности воздуха, а при $S_{m,c} < 0$ наиболее вероятное значение плотности больше среднего значения.

Начальные приближения значений параметров аппроксимационной функции (9) целесообразно выбрать из следующих отрезков:

$$1 \leq \alpha \leq 10; 0,01 \leq \lambda < 0,03; 1,1 < \xi < 1,3.$$

Значения параметров функции (9), вычисленные для месячно-часовых выборок плотности воздуха с помощью модифицированного метода Ньютона, индивидуальны для каждой комбинации номера месяца и номера часа, поэтому есть смысл рассматривать прямоугольные матрицы размером 12×24 с элементами $\alpha_{m,c}$, $\lambda_{m,c}$, $\xi_{m,c}$.

Теоретические распределения плотности вероятности, полученные на основе формулы (9), визуально соответствуют (рис. 1—4) экспериментальным

гистограммам, построенным на основе месячно-часовых выборок плотности воздуха в приземном слое атмосферы.

Целевая функция

Задача поиска значений параметров статистического закона (9) сводится к минимизации среднеквадратических ошибок аппроксимации статистической плотности распределения вероятности массовой плотности атмосферного воздуха:

$$\sigma_{m,c} = \sqrt{\frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^M \left((f_{m,c})_i - f(\rho_i; \alpha_{m,c}, \lambda_{m,c}, \xi_{m,c}) \right)^2}, \quad (10)$$

где i — номер полуинтервала группирования экспериментальных значений плотности воздуха; M — количество полуинтервалов группирования плотности воздуха;

$(f_{m,c})_i = \frac{(Y_{m,c})_i}{\Delta\rho \cdot N_{m,c}}$ — эмпирическая статистическая плотность распределения вероятности попадания значения плотности воздуха в полуинтервал с номером i в месяце m в час c ; $(Y_{m,c})_i$ — экспериментальная частота попадания значения

плотности воздуха в полуинтервал с номером i в месяце m в час c ; $N_{m,c} = \sum_{i=1}^M (Y_{m,c})_i$;

$\Delta\rho$ — ширина полуинтервалов группирования плотности воздуха.

Минимизация ошибок аппроксимации эмпирического распределения вероятности плотности воздуха возможна в случае минимизации целевой функции следующего вида:

Минимизация ошибок аппроксимации эмпирического распределения вероятности плотности воздуха возможна в случае минимизации целевой функции следующего вида:

$$C(\alpha_{m,c}, \lambda_{m,c}, \xi_{m,c}) = \sum_{i=1}^M \left((f_{m,c})_i - f(\rho_i; \alpha_{m,c}, \lambda_{m,c}, \xi_{m,c}) \right)^2, \quad (11)$$

Целевая функция (11) составлена на основе метода наименьших квадратов.

Результаты аппроксимации

В результате варьирования трёх параметров аппроксимационной функции (9) и минимизации целевой функции (11) вычислены оптимальные комбинации параметров α , λ , ξ функции (9) на основе метеорологических данных метеостанций, расположенных в различных местах России. Параметры функции (9) варьируются в следующих пределах: $1 < \alpha_{m,c} < 80$; $0,01 < \lambda_{m,c} < 0,03$; $1,1 < \xi_{m,c} < 1,32$.

Вычисленные оптимальные значения параметров, соответствующих гладким кривым на рисунках 1—4, собраны в таблице 1.

Случайный выбор разных сочетаний m и c позволяет показать сезонную и суточную универсальность предлагаемой аппроксимационной функции (9) без рассмотрения всех возможных комбинаций m и c . Знак коэффициента асимметрии эмпирических распределений определяет тип асимметрии распределения и значение функции $k(\alpha)$, входящей в состав аппроксимационной функции (9).

Таблица 1

Значения параметров аппроксимационной функции (9)
 Values of the parameters of the approximation function (9)

Рисунок	Месяц	Час	Параметры аппроксимационной функции			$S_{m,c}$
	m	c	$\alpha_{m,c}$	$\lambda_{m,c}$	$\xi_{m,c}$	
1а	1	15	36,511	0,027	1,202	$S_{m,c} > 0$
1б	6	16	1,868	0,015	1,154	$S_{m,c} > 0$
2а	4	7	3,214	0,017	1,309	$S_{m,c} < 0$
2б	7	16	2,992	0,011	1,144	$S_{m,c} > 0$
3а	5	23	3,026	0,018	1,297	$S_{m,c} < 0$
3б	11	1	4,513	0,027	1,249	$S_{m,c} > 0$
4а	4	13	45,198	0,020	1,308	$S_{m,c} < 0$
4б	9	12	9,333	0,016	1,137	$S_{m,c} > 0$

Межгодовая изменчивость температуры и плотности воздуха не является причиной наличия асимметрии этих статистических распределений, так как знак коэффициента асимметрии распределений для многолетних и однолетних месячно-часовых выборок совпадает.

Асимметрия статистических распределений плотности воздуха является следствием наложения сезонных колебаний плотности воздуха с годовым периодом, внутрисезонных, мезометеорологических и синоптических колебаний. Параметры статистического распределения вероятности плотности воздуха связаны с географическими особенностями местности и с особенностями соответствующей розы ветров (на высоте расположения датчиков метеостанции), построенной для выбранного месяца m и часа c .

Проверка согласия гипотетического закона распределения с экспериментальными данными

Проверка гипотез о согласии гипотетических законов распределения с экспериментальными данными выполнена на основе критерия Пирсона и критерия Колмогорова [19, 20]. Статистику критерия Пирсона представим формулой:

$$G_{m,c} = N_{m,c} \cdot \sum_{i=1}^M \frac{\left((f_{m,c})_i \cdot \Delta\rho - (W_{m,c})_i \right)^2}{(W_{m,c})_i}, \quad (12)$$

где $N_{m,c}$ — количество учитываемых экспериментальных значений плотности воздуха, входящих в месячно-часовую выборку месяца m и часа c ; M — количество полуинтервалов группирования плотности воздуха; $(f_{m,c})_i \cdot \Delta\rho = \frac{(Y_{m,c})_i}{N_{m,c}}$ — эмпирическая вероятность попадания значения плотности воздуха в полуинтервал с номером i в месяце m в час c ; $(W_{m,c})_i$ — теоретическая вероятность попадания плотности воздуха в отрезок с номером i в месяце m в час c .

Величина $(W_{m,c})_i$ определяется интегралом:

$$(W_{m,c})_i = \int_{\rho_i - \Delta\rho/2}^{\rho_i + \Delta\rho/2} f(\rho; \alpha_{m,c}, \lambda_{m,c}, \xi_{m,c}) d\rho,$$

здесь $\Delta\rho$ — ширина каждого отрезка градации величины плотности воздуха; $\Delta\rho = 0,01 \text{ кг/м}^3$; ρ_i — плотность воздуха, соответствующая середине i -го отрезка.

Критическое значение \tilde{G} статистики критерия Пирсона равно квантилю $q\chi^2(\tilde{p}, \nu)$ распределения хи-квадрат с доверительной вероятностью \tilde{p} и числом степеней свободы ν , где $\nu = M - r - 1$, r — число оцениваемых параметров распределения.

Гипотеза о согласии аппроксимационной функции с экспериментальными данными считается подтверждённой, если выполняется условие:

$$G_{m,c} < \tilde{G}_{m,c}. \quad (13)$$

Статистика критерия Колмогорова-Смирнова определяется формулой:

$$G_{m,c} = \sqrt{N_{m,c}} \cdot \sup_{\rho} \left| F_e(\rho) - F(\rho; \alpha_{m,c}, \lambda_{m,c}, \xi_{m,c}) \right|, \quad (14)$$

где \sup — супремум; $F_e(\cdot)$ — эмпирическая функция распределения вероятности плотности воздуха, построенная на основе экспериментальных данных температуры, влажности и давления; $F(\cdot)$ — теоретическая функция распределения вероятности плотности воздуха.

Эмпирическая функция распределения плотности воздуха ρ , представленной упорядоченной выборкой $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \dots \leq \rho_i \leq \dots \leq \rho_M$, имеет вид:

$$F_e(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho < \rho_1; \\ \frac{1}{N_{m,c}} \cdot \sum_{j=1}^i (Y_{m,c})_j, & \rho_i < \rho < \rho_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq M-1. \\ 1, & \rho \geq \rho_M. \end{cases}$$

Теоретическая функция распределения, соответствующая статистической плотности вероятности (9), найдена путём интегрирования выражения (9) по плотности воздуха ρ . В результате интегрирования (9) получена новая формула:

$$F(\rho; \alpha, \lambda, \xi) = \frac{\left(1 + \exp\left(-\frac{\rho - \xi}{\lambda}\right)\right)^{k(\alpha)} - \exp\left(-k(\alpha) \cdot \frac{\rho - \xi}{\lambda}\right)}{\left(1 + \exp\left(-\frac{\rho - \xi}{\lambda}\right)\right)^\alpha}. \quad (15)$$

Величина $F(\hat{\rho}; \alpha_{m,c}, \lambda_{m,c}, \xi_{m,c})$ равна вероятности того, что плотность воздуха в месяце m в час c не превысит заданную величину $\hat{\rho}$, т. е. вероятности того, что $\rho \leq \hat{\rho}$.

В случае положительной асимметрии $k(\alpha) = 1$ и формула (15) приводит к выражению:

$$F_I(\rho; \alpha, \lambda, \xi) = \frac{1}{\left(1 + \exp\left(-\frac{\rho - \xi}{\lambda}\right)\right)^\alpha}. \quad (16)$$

При отрицательной асимметрии $S_{m,c} < 0$ получаем $k(\alpha) = \alpha$ и формула (15) принимает вид:

$$F_{II}(\rho; \alpha, \lambda, \xi) = 1 - \frac{\exp\left(-\alpha \cdot \frac{\rho - \xi}{\lambda}\right)}{\left(1 + \exp\left(-\frac{\rho - \xi}{\lambda}\right)\right)^\alpha}. \quad (17)$$

Функции распределения (15) — (17) нормированы к единице.

Критическое значение \tilde{G} статистики критерия Колмогорова-Смирнова равно квантилю распределения Стьюдента [19, 20] с доверительной вероятностью \tilde{p} и числом степеней свободы ν . Проверяемая гипотеза считается подтверждённой, если выполняется условие, аналогичное (13).

Доверительная вероятность задана равной $\tilde{p} = 90\%$. Согласие экспериментальных распределений, построенных для месячно-часовых выборок, с предложенной формулой (9) подтверждается критериями согласия Пирсона и Колмогорова-Смирнова с указанной доверительной вероятностью. Условие (13) выполняется для всех исследованных экспериментальных месячно-часовых выборок, что подтверждает гипотезу о согласии экспериментальных данных с предложенными статистическими формулами (9) и (15).

Расчёт вероятности

Вероятность $U_{m,c}$ того, что плотность ρ воздуха в заданном месте приземного слоя атмосферы будет принадлежать отрезку $\rho' \leq \rho \leq \rho''$ в месяце с номером m в час c можно найти с помощью интегрального выражения:

$$U_{m,c} = \int_{\rho'}^{\rho''} f(\rho; \alpha_{m,c}, \lambda_{m,c}, \xi_{m,c}) d\rho, \quad (18)$$

где $\alpha_{m,c}, \lambda_{m,c}, \xi_{m,c}$ — комбинация параметров функции (9), вычисленная для заданного географического места и заданного времени года и суток (месяца с номером m и часа с номером c).

Формулы (9) и (18) могут быть полезны при статистическом прогнозировании плотности воздуха и в статистических моделях (процессов и объектов), в которые входит плотность воздуха в приземном слое атмосферы.

Выводы

Эмпирические статистические распределения, построенные на основе месячно-часовых выборок плотности воздуха в приземном слое атмосферы, обладают коэффициентами асимметрии и эксцесса, не равными нулю. Гипотеза о нормальности эмпирических распределений плотности воздуха в месячно-часовых выборках плотности воздуха отвергнута с помощью статистического критерия Харке-Бера.

Предложенная аппроксимационная функция (9) содержит три варьируемых параметра и обладает свойством географической универсальности, т. е. может применяться к статистическим распределениям вероятности плотности атмосферного воздуха в приземном слое в различных районах Земли. Географическая универсальность новых формул (9) и (15) проверена для эмпирических статистических распределений вероятности плотности атмосферного воздуха, вычисленной на основе метеорологических данных, полученных в районах с разными типами климата.

Сезонная и суточная универсальность формул (9) и (15) проверена по метеорологическим данным метеостанций аэропортов в разные времена года и суток. Универсальность математической модели статистических распределений вероятности плотности атмосферного воздуха в приземном слое атмосферы достигнута с помощью трёхпараметрических формул (9) и (15). Указанные формулы получены на основе логистических распределений типа I и II в результате введения функции $k(\alpha)$, принимающей одно из двух значений в зависимости от знака выборочного коэффициента асимметрии эмпирического распределения вероятности плотности атмосферного воздуха в заданный месяц и час. Гипотеза о соответствии формул (9) и (15) эмпирическим статистическим распределениям плотности воздуха в приземном слое атмосферы подтверждена с помощью критериев согласия Пирсона и Колмогорова-Смирнова для месячно-часовых выборок плотности атмосферного воздуха.

Вероятность того, что плотность воздуха в приземном слое атмосферы будет находиться в заданном диапазоне, можно вычислить с помощью интеграла (18) в результате интегрирования функции (9).

Список литературы

1. Holton J. R., Hakim G. J. An introduction to dynamic meteorology. 5-th ed. Waltham: Elsevier Academic Press. 2013. 532 p.
2. Achatz U. Atmospheric dynamics. Berlin: Springer Spektrum Berlin, Heidelberg. 2022. 554 p.
3. Gordon M., Li S.-M., Staebler R., et al. Determining air pollutant emission rates based on mass balance using airborne measurement data over the Alberta oil sands operations. // Atmospheric measurement techniques. 2015. No. 8. 3745—3765. DOI: 10.5194/amt-8-3745-2015.
4. Oguz E., Kaya M. D., Nuhoglu Y. Interaction between air pollution and meteorological parameters in Erzurum, Turkey // International Journal of Environment & Pollution. 2003. Vol. 19. No. 3. P. 292—300. DOI: 10.1504/IJEP.2003.003312.
5. Varapongpisan T., Ingsrisawang L., Frank T. D. Taking drift-diffusion analysis from the study of turbulent flows to the study of particulate matter smog and air pollutants dynamics // Condensed Matter Physics. 2019. Vol. 22. №2. P. 24001. DOI: 10.5488/CMP.22.24001.

6. Landberg L. Meteorology for wind energy: An introduction. United Kingdom, Chichester: John Wiley & Sons Ltd. 2016. 205 p.
7. Mathew S., Philip G. S. Advances in wind energy conversion technology. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. 2011. 216 p.
8. Hansen M. O. L. Aerodynamics of wind turbines. 3-rd ed., New York: Routledge Taylor & Francis Group. 2015. 189 p.
9. Gasch R., Twele J. Wind power plants: Fundamentals, design, construction and operation, 2-nd ed., Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. 2012. 550 p.
10. Buck A. L. Model CR-1A hygrometer with autofill. Operating manual. Buck research instruments, LLC. 2012. 26 p.
11. Buck A. L. New equations for computing vapor pressure and enhancement factor. // Journal of Applied Meteorology. 1981. Т. 12. V.20. P. 1527—1532.
12. Погода в 241 странах мира: [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.rp5.ru (дата обращения: 15.01.2023).
13. Капля Е. В. Параметрическая аппроксимация плотности распределения относительной влажности атмосферного воздуха в условиях континентального климата. // Метеорология и гидрология. 2015. Т. 5. С. 44—51.
14. Айвазян С. А. Енюкова И. С., Мешалкина Л. Д и др. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное изд. / Под ред. С. А. Айвазян — М.: Финансы и статистика. 1983. 471 с.
15. Jarque C. M., Bera A. K. A test for normality of observations and regression residuals. // International statistical review. 1987. 55(2). P. 163—172.
16. Teegavarapu R. S. V., Salas J. D., Stedinger J. R. Statistical analysis of hydrologic variables. Methods and applications. Reston: American Society of Civil Engineers, 2019. 552 p.
17. Balakrishnan N., Nevzorov V. B. A primer on statistical distributions. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. 2003. 305 p.
18. Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N. Continuous univariate distributions, volume 2. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc. 2-nd ed. 1995. 718 p.
19. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Математическая статистика. М.: Высшая школа. 1984. 248 с.
20. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. 2-е изд. испр. М.: Физматлит. 2012. 816 с.

References

1. Holton J. R., Hakim G. J. An introduction to dynamic meteorology. 5-th ed. Waltham: Elsevier Academic Press, 2013: 532 p.
2. Achatz U. Atmospheric dynamics. Berlin: Springer Spektrum Berlin. Heidelberg, 2022: 554 p.
3. Gordon M., Li S.-M., Staebler R., et al. Determining air pollutant emission rates based on mass balance using airborne measurement data over the Alberta oil sands operations. *Atmospheric measurement techniques*. 2015; 8: 3745—3765. DOI: 10.5194/amt-8-3745-2015.
4. Oguz E., Kaya M. D., Nuhoglu Y. Interaction between air pollution and meteorological parameters in Erzurum, Turkey. *International journal of environment & pollution*. 2003; 3 (19): 292—300. DOI: 10.1504/IJEP.2003.003312.
5. Varapongpisan T., Ingsrisawang L., Frank T. D. Taking drift-diffusion analysis from the study of turbulent flows to the study of particulate matter smog and air pollutants dynamics. *Condensed Matter Physics*. 2019; 22(2):24001. DOI: 10.5488/CMP.22.24001.
6. Landberg L. Meteorology for wind energy: An introduction. United Kingdom, Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2016: 205 p.
7. Mathew S., Philip G. S. Advances in wind energy conversion technology. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011: 216 p.
8. Hansen M. O. L. Aerodynamics of wind turbines. 3-rd ed., New York: Routledge Taylor & Francis Group, 2015: 189 p.
9. Gasch R., Twele J. Wind power plants: Fundamentals, design, construction and operation, 2-nd ed., Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2012: 550 p.

10. Buck A. L. Model CR-1A hygrometer with autofill. Operating manual. Buck research instruments, LLC. 2012: 26 p.
11. Buck A. L. New equations for computing vapor pressure and enhancement factor. *Journal of Applied Meteorology*. 1981, 12 (20): 1527—1532.
12. Weather in 241 countries of the world. Available at: www.rp5.ru (accessed on: 15.01.2023).
13. Kaplya E. V. Parametric approximation of the probability density function of relative air humidity under conditions of the continental climate. *Meteorologiya i gidrologiya = Russian meteorology and hydrology*. 2015; 5 (40): (313–318). (In Russ.). DOI: 10.3103/S1068373915050040.
14. Ayvazyan S. A., Enyukova I. S., Meshalkina L. D. *Prikladnaya statistica: Osnovni modelirovaniya i pervichnaya obrabotka dannyih. Spravochnoe izd. = Applied statistics: Fundamentals of modeling and primary data processing. Reference ed.* Moscow: *Finansyi i statistika = Finance and statistics*. 1983: 471 p. (In Russ.).
15. Jarque C. M., Bera A. K. A test for normality of observations and regression residuals. *International statistical review*. 1987. 55(2). P. 163—172.
16. Teegavarapu R. S. V., Salas J. D., Stedinger J. R. Statistical analysis of hydrologic variables. Methods and applications. Reston: American society of civil engineers, 2019: 552 p.
17. Balakrishnan N., Nevzorov V. B. A primer on statistical distributions. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc. 2003: 305 p.
18. Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N. Continuous univariate distributions, volume 2. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc. 2-nd ed. 1995: 718 p.
19. Ivchenko G. I., Medvedev Yu. I. *Matematicheskaya statistica = Mathematical statistics*. Moscow: *Vysshaya shkola = Higher School*, 1984: 248 p. (In Russ.).
20. Kobzar A. I. *Prikladnaya matematicheskaya statistica. Dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov = Applied mathematical statistics. For engineers and scientists*. 2-nd ed. Moscow: Physical and mathematical literature. 2012: 816 p. (In Russ.).

Информация об авторе

Егор Викторович Капля, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Электроснабжение и энергетические системы» Волгоградского государственного аграрного университета, ev-kaple@yandex.ru.

Information about authors

Egor Victorovich Kaplya, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor. Associate professor of the department “Power supply and energy systems” of the Volgograd state agrarian university.

Статья поступила 28.08.2023

Принята в печать 30.11.2023

The article was received on 28.08.2023

The article was accepted 30.11.2023