

Гидрометеорология и экология. 2024. № 76. С. 507—523.

Hydrometeorology and Ecology. 2024;(76):507—523.

## ***ГИДРОЛОГИЯ***

Научная статья

УДК 556.16:627.133.5

doi: 10.33933/2713-3001-2024-76-507-523

### **Оценка неопределенности гидрометрического учета стока при использовании однозначной кривой расходов воды**

***Тимур Менирович Аксянов, Татьяна Ивановна Яковлева***

Государственный гидрологический институт, Санкт-Петербург, Россия, oggc@yandex.ru

*Аннотация.* В статье приведены результаты оценки неопределенности (погрешности) гидрометрического учета стока при использовании для расчетов ежедневных расходов воды однозначной кривой расходов. Даны рекомендации по выбору оптимальной аппроксимирующей зависимости для кривой расходов, позволяющие получить наиболее узкую полосу неопределенности. Приведены результаты численных экспериментов по оптимизации измерений расходов воды по данным наблюдений 2017 г. гидрологического поста р. Терек — с. Аликазган, которые показывают, что при оптимально подобранной аппроксимации кривой расходов воды количество измеренных расходов воды для ее обоснования может быть сокращено в два или даже три раза без ущерба точности расчета ежедневных расходов воды.

*Ключевые слова:* измеренные расходы воды, учёт стока, оценка неопределенности, аппроксимация кривой расходов воды.

*Для цитирования:* Аксянов Т. М., Яковлева Т. И. Оценка неопределенности гидрометеорологического учета стока при использовании однозначной кривой расходов воды // Гидрометеорология и экология. 2024. № 76. С. 507—523. doi: 10.33933/2713-3001-2024-76-507-523.

## ***HYDROLOGY***

Original article

### **Estimation of uncertainty of hydrometric water discharge computation when using a single-valued discharge curve**

***Timur M. Aksyanov, Tatiana I. Yakovleva***

State Hydrological Institute, St. Petersburg, Vasilyevsky Island, 2nd line, 23

*Summary.* The article presents the results of estimating the uncertainty (error) of hydrometric water discharge computation (computation of daily and averaged water discharges over a decade, month and year) when using a single-valued discharge curve for computation daily water discharges. The algorithm

developed in the course of research for estimating the boundaries of the uncertainty band of the discharge curve can be used to estimate uncertainties (errors) in computation daily water discharges based on continuous observations of water levels and episodic measurements of water flow. Recommendations are given on the choice of the optimal approximating dependence for the discharge curve, allowing to obtain the narrowest band of uncertainty. The results of numerical experiments on the optimization of measurements of water discharge according to the 2017 observations of the hydrological post riv. Terek — vil. Alikazgan, which show that with an optimally selected approximation of the discharge curve, the number of measured water discharges for its justification can be reduced by two or even three times without compromising the accuracy of computation of daily water discharges. When reducing the initial set of measured water discharge by almost three times, the standard errors in calculating daily and average annual water discharge increased by no more than 1,5 %.

*Keywords:* measured water discharge, runoff estimation, uncertainty approximation of rating curves.

*For citation:* Aksyanov T. M., Yakovleva T. I. Estimation of uncertainty of hydrometric water discharge computation when using a single-valued discharge curve. *Gidrometeorologiya i Ekologiya = Journal of Hydrometeorology and Ecology*. 2024;(76):507—523. (In Russ.). doi: 10.33933/2713-3001-2024-76-507-523.

## Введение

В современных условиях особое значение приобретает гидрометрический контроль речного стока в связи с антропогенными изменениями климата и ландшафтно-экологических условий. Объективная оценка погрешностей учета стока — составная часть такого контроля. Между тем в гидрологической литературе существуют противоречивые представления о погрешностях вычисления расходов воды [1—2]. Чаще всего эти погрешности оказываются заниженными из-за недоучета изменений пропускной способности русла в интервале между измерениями расходов воды. Попытка выполнить оценку погрешностей вычисления ежедневных расходов воды (ЕРВ) на статистической основе сделана Г. А. Алексеевым [1]. К сожалению, при получении таких оценок автор опирался на некоторые ошибочные предпосылки.

Во-первых, все выкладки в [1] сделаны для случая вычисления ЕРВ методом линейной интерполяции между измеренными расходами воды (ИРВ), при этом полностью проигнорирован факт наличия связи расходов и уровней воды, во-вторых, для расчета погрешностей интерполяции автокорреляционная функция рассчитывалась по данным ЕРВ, в то время как необходимо было оценивать автокорреляционную связанность по данным измеренных расходов воды. В [1] приведены оценки погрешностей, осредненных за декаду, месяц и сезон характеристик речного стока, которые в трактовке Г. А. Алексеева напрямую зависят от временной корреляционной связанности и коэффициента вариации ежедневных расходов воды. Например, для периода весеннего половодья для гидрологического поста (ГП) р. Сакмара — с. Галеево в [1] получено значительно завышенное значение погрешности среднего месячного расхода воды (при трех ИРВ в месяц) — 41 %.

Позднее приближенные оценки погрешностей ежедневных и осредненных характеристик расходов воды были сделаны в работах [3, 4]. В [3] показано, что наибольшая погрешность расчета максимальных ежедневных расходов воды может превышать среднее квадратическое значение случайной погрешности ИРВ

в 1,8 раза, наименьших — в 14 раз, в среднем диапазоне расходов — быть в пять раз меньше случайной погрешности ИРВ.

В отечественной гидрологической практике до настоящего времени принято оценивать погрешности данных гидрологических наблюдений и гидрометрического учета стока по отклонению результата измерения или расчета от истинного или действительного (условно истинного) значения измеряемой (рассчитанной) величины. Под истинным значением физической величины понимают значение, идеально отражающее в качественном и количественном отношениях соответствующее свойство объекта. Из-за несовершенства средств и методов измерений и методов расчета истинные значения величин практически получить нельзя.

В настоящее время общепризнано, что после того, как найдены оценки всех ожидаемых составляющих погрешности и в результате измерения внесены соответствующие поправки, все еще остается некоторая неопределенность в отношении полученного результата, т. е. сомнение в том, насколько точно он соответствует значению измеряемой или рассчитанной величины. По этой причине при оценке точности измерений и расчетов следует использовать вместо понятия «погрешность» понятие «неопределенность».

Неопределенность — это интервал, в котором может с заданной вероятностью находиться действительное значение некоторой величины. Числовое значение неопределенности является произведением истинного стандартного отклонения погрешностей и числового параметра, зависящего от доверительного уровня [5, 6].

Понятие «неопределенности» в измерениях и в оценке гидрологических характеристик как определяемой в количественном отношении характеристики точности измерений является относительно новым в противоположность термину «погрешность», который уже давно используется в гидрологической практике.

С целью достижения международного единства в подходах к определению неопределенностей измерений объединенной рабочей группой экспертов, назначенных Международным бюро мер и весов (МБМВ), Международной организацией по стандартизации (ИСО), Международной электротехнической комиссией (МЭК) и Международной организацией законодательной метрологии (МОЗМ), было разработано «Руководство по выражению неопределенности в измерениях» [7]. В Российской Федерации Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии введен в действие в качестве национального стандарта Российской Федерации с 1 сентября 2018 г. межгосударственный стандарт ГОСТ 34100.3—2017, идентичный Руководству [7].

На практике существует много возможных источников (ошибок) неопределенности при измерении, которые могут включать исходные ошибки, ошибки в отсчете, ошибки интерполяции, ошибки наблюдения, гистерезис, ошибку, вызванную нелинейностью, ошибку использования прибора за пределами допустимой точности и пр. [8].

Гидрологические характеристики часто вычисляются по нескольким измеренным составляющим, поэтому различают стандартную неопределенность, суммарную неопределенность и расширенную неопределенность.

В настоящей работе мы остановимся на стандартной неопределенности. Стандартная неопределенность соответствует одному стандартному отклонению распределения вероятностей ошибок измерений. При оценке данных расчета расходов воды по зависимости расходов от уровней воды  $Q(H)$  неопределенность расчета необходимо выразить в виде полосы или интервала неопределенности. В последнее десятилетие вопрос оценки неопределенностей расчета расходов воды по кривым расходов привлекает внимание многих авторов [9, 10]. Целью данной статьи является разработка алгоритма расчета границ полосы неопределенности кривой расходов, опирающегося на статистические характеристики аппроксимирующей ее функции.

### **Оценка неопределенности гидрометрического учета стока на основе однозначных зависимостей расходов от уровней воды**

В соответствии с основными положениями методики гидрометрического учета стока, изложенными в [11, 12, 13], в большинстве случаев за основу расчета ежедневных расходов воды принимается кривая расходов воды (КР). В режимном варианте учета стока чаще всего используется годовая КР, построенная по данным измеренных расходов воды расчетного года. При оперативном вычислении расходов воды для каждого исследуемого гидрометрического створа необходимо выбрать опорную КР. В качестве опорной для оперативного учета стока кривой расходов рекомендуется принимать:

— многолетнюю зависимость расходов от уровней воды  $Q(H)$  в случаях, когда в течение последних нескольких лет не происходило существенных изменений русла и режима реки;

— уравнение, полученное по данным об ИРВ одного-двух последних лет, если такие изменения прослеживались.

Об изменениях, происходящих в русле реки, можно судить на основе анализа положения годовых кривых расходов на графике  $Q(H)$  и хронологических графиков изменения средних и минимальных отметок дна в исследуемом гидрометрическом створе в течение ряда лет.

Для удобства выполнения расчетов и их автоматизации КР необходимо представить в виде аналитического выражения, то есть выполнить аппроксимацию зависимости расходов от уровней воды  $Q(H)$ . Уравнение аналитической зависимости расходов от уровней воды может быть получено непосредственно по данным совокупности ИРВ за отдельный год или за многолетие. Аналитическое уравнение может быть получено также по данным (опорным точкам) таблицы координат, выбранной для использования опорной КР.

Аналитическое представление зависимости расходов от уровней  $Q(H)$  расширяет возможности по оценке неопределенности получаемых на основе КР данных расчета ежедневных или срочных расходов воды.

Один из основных рекомендуемых способов аналитического представления КР — это предложенная В. Г. Глушковым аналитическая форма аппроксимации КР, имеющая вид:

$$Q(H) = a(H - H_0)^b, \quad (1)$$

где  $Q$  — расход воды, м<sup>3</sup>/с;  $H$  — наблюдаемый уровень воды над «нулем» поста, м<sup>1</sup>;  $H_0$  — уровень воды над «нулем» поста, при котором расход воды в исследуемом гидростворе равен нулю, м;  $a$  и  $b$  — параметры уравнения регрессии (УР), определяемые по данным измерений.

Второй рекомендуемый способ аппроксимации — метод полиномиальной регрессии, т. е. получение УР в виде полинома:

$$Q = a_0 + a_1H + a_2H^2 + \dots + a_kH^k, \quad (2)$$

где  $a_0, \dots, a_k$  — параметры УР, определяемые по данным измерений.

Наиболее часто подбирается полином второй или третьей степени, редко четвертой. Использование при аппроксимации КР степеней полинома вида (2) выше 4-ой степени приводит, как правило, к плохой обусловленности матрицы  $(H, H^k)$ , что многократно увеличивает погрешности расчета параметров УР [14].

Параметры УР вида (1) и (2) определяются с использованием метода наименьших квадратов (МНК).

В результате аппроксимации рассчитывается УР для линии (поверхности) регрессии, которая получается путем усреднения данных измерения и, в значительной мере, свободна от случайных погрешностей, присущих используемому методу измерения. Однако при этом случайные погрешности не устраняются полностью, а лишь уменьшаются в определенное число раз, поэтому получаемая в результате статистической обработки (как посредством графических построений, способом медиан, так и МНК) зависимость сохраняет некоторую полосу неопределенности, хотя и более узкую (в случае, если она обоснована достаточным количеством измерений), чем полоса рассеяния исходных данных. Ширина полосы неопределенности рассчитывается по формулам, в которые входят такие величины, как дисперсия параметров УР, объем исходной совокупности данных и коэффициенты корреляции независимых переменных, входящих в УР.

При выборе наилучшего (оптимального) уравнения для аппроксимации зависимости расходов от уровней воды выполняется сравнение следующих характеристик качества аппроксимации:

- средних абсолютных ( $m_q$ ) и средних относительных ( $m_q$ ) значений отклонений ИРВ от УР линии (поверхности) регрессии;
- среднеквадратических абсолютных ( $\sigma_q$ ) и среднеквадратических относительных ( $\sigma_q$ ) значений отклонений ИРВ от линии (поверхности) регрессии;
- анализа графиков относительных отклонений ИРВ от уровня воды  $\tilde{q}(H)$ , пример которого приведен на рис. 1.

В соответствии с рекомендациями [11, 12], в качестве наилучшей (оптимальной) выбирается аппроксимирующая зависимость, имеющая следующие характеристики качества аппроксимации:

<sup>1</sup> Для того, чтобы значения параметров аппроксимирующего КР уравнения были значимыми, при аппроксимации уровни воды принято выражать в м, а не в см над «нулем» поста.

— значения  $m_q$  и  $m_{\dot{q}}$  близки к нулю, что свидетельствует об отсутствии систематической составляющей в совокупности отклонений ИРВ от линии (поверхности) регрессии;

— значения  $\sigma_q$  и  $\sigma_{\dot{q}}$  имеют наименьшие значения по сравнению с другими алгоритмами аппроксимации;

— точки на графике  $\tilde{q}(H)$  располагаются примерно симметричными полосами сверху и снизу от линии нулевой ординаты ( $\tilde{q} = 0$ ), как показано на рис. 1;

— ширина полосы неопределенности КР должна быть наименьшей.

При близости значений основных характеристик качества аппроксимации, перечисленных выше, наименьшую полосу неопределенности имеет простая линейная регрессия в виде:

$$Q(H) = a_0 + a_1 H. \tag{3}$$

Погрешность аппроксимации линейной модели оказывается наименьшей в точке центра тяжести исходных данных, т. е. в точке  $(Q_{cp}, H_{cp})$  [14] и равна:  $\sigma_p / \sqrt{(n-2)}$ . По мере удаления от центра тяжести в обе стороны она увеличивается, и в любой произвольной точке  $t$  ее дисперсия равна:

$$\sigma_{Q_p(H_t)}^2 = \sigma_p^2 / (n-2) + \sigma_{a_1}^2 (H_t - \bar{H})^2, \tag{4}$$

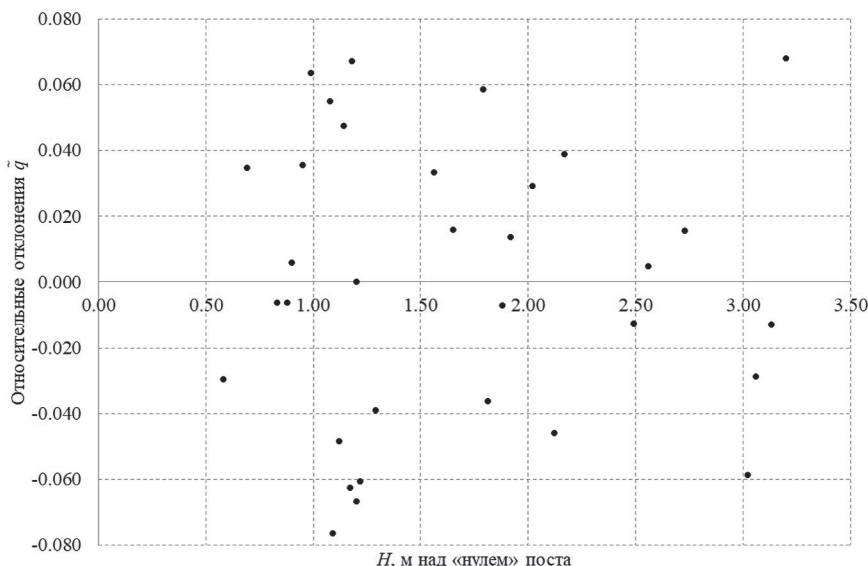


Рис. 1. График зависимости относительных отклонений от уровня воды по результатам аппроксимации кривой расходов полиномом 3-й степени с ограничениями.

Fig. 1. Graph of dependence of relative deviations from the water stage based on the results of stage-discharge rating curve approximation by a polynomial of degree 3 with restrictions.

где  $\sigma_p$  — стандартное отклонение рассеяния УР,  $n$  — длина исходной совокупности данных,  $\sigma_{a_1}^2$  — дисперсия параметра  $a_1$  линейного УР,  $\bar{H}$  — среднее значение уровня воды по исходной совокупности ИРВ.

Оценка ординаты линии регрессии в заданной точке  $t$  определяется по формуле [15]:

$$Q_{pt} = a_0^* + a_1^* (H_t - \bar{H}) \pm t_p \frac{\sigma_p^*}{\sqrt{n-2}} \sqrt{1 + \left( \frac{H_t - \bar{H}}{s_1} \right)^2}, \quad (5)$$

где  $a_0^*$ ,  $a_1^*$  — оценки коэффициентов уравнения линейной регрессии;  $t_p$  — параметр распределения Стьюдента для  $p$ -процентного доверительного интервала;  $\sigma_p^*$  — среднеквадратическое значение отклонения точек ИРВ от линии (поверхности) регрессии, являющееся оценкой стандарта рассеяния УР;  $s_1$  — стандартное отклонение переменной  $H$ .

Для многомерной регрессии формула (4) запишется в виде:

$$\sigma_{Q_{pt}}^2 = \frac{\sigma_p^2}{n-v} + \sum_{i,j=1}^k \sigma_{a_i}^2 \sigma_{a_j}^2 (X_{it} - \bar{X}_i)^2 (X_{jt} - \bar{X}_j)^2. \quad (6)$$

Здесь  $n$  — длина исходной совокупности ИРВ;  $k$  — число независимых переменных УР;  $v$  — число степеней свободы УР;  $\sigma_{a_i}^2$ ,  $\sigma_{a_j}^2$  — дисперсии параметров регрессии  $a_i$ ,  $a_j$ ;  $X_1 = H$ ,  $X_2 = H^2$ ; ...,  $X_k = H^k$ ;  $\bar{X}_i$ ,  $\bar{X}_j$  — средние значения переменных, соответственно  $X_i$  и  $X_j$ .

Таким образом, уравнение регрессии  $Q(X_1, \dots, X_k)$  воспроизводит  $Q$  с погрешностью приближения  $\sigma_{Q_{pt}}$ , которая выражается посредством суммирования дисперсий параметров регрессии  $a_0$ ,  $a_1$ , ...,  $a_k$ .

Оценка ординаты поверхности многомерной регрессии в какой-нибудь заданной точке определяется по формуле [15]:

$$Q_{pt} = a_0^* + \sum_1^k a_i^* (X_{it}) \pm t_p \frac{\sigma_p^*}{\sqrt{n-k-1}} \sqrt{1 + \sum_{i,j=1}^k \frac{L_{i,j}}{L} (X_{it} - \bar{X}_i)(X_{jt} - \bar{X}_j)}. \quad (7)$$

Здесь через  $L$  и  $L_{ij}$  обозначены детерминант и его дополнения матрицы исходных данных  $(Q, H, H^k)$ .

Параметр  $t_p$  для доверительного интервала с вероятностью непревышения 95 % для УР с двумя степенями свободы равен 2,92, с тремя степенями свободы — 2,35.

Очевидно, что полоса неопределенности линии или поверхности регрессии, которая используется для расчета ежедневных расходов воды (ЕРВ) в режимном и оперативном вариантах, будет тем меньше, чем меньше степень аппроксимирующей функции, а наиболее узкой она будет при использовании линейной аппроксимации. Уменьшить ширину полосы неопределенности можно, выполнив подбор УР к преобразованным исходным данным с целью получения линейных уравнений, для которых по методу МНК определяются их параметры.

Так, при подборе уравнение в виде (1) для расчета по МНК параметров  $a$  и  $b$  выражение (1) преобразуется к логарифмическому виду:

$$\text{Ln}(Q) = \text{Ln}(a) + b \text{Ln}(H - H_0). \quad (8)$$

Параметры  $\text{Ln}(a)$  и  $b$  уравнения (8) получают методом наименьших квадратов (МНК) на основе совокупности преобразованных данных ИРВ. К преобразованным переменным  $Y = \text{Ln}(Q)$  и  $X = (H - H_0)$  подбирается аппроксимирующий полином первой степени в виде:

$$Y = a_0 + a_1 X. \quad (9)$$

Затем уравнение вновь преобразуют к виду (1), в котором параметр  $a = \exp(a_0)$ , а показатель степени  $b = a_1$ . Здесь  $a_0$  и  $a_1$  — коэффициенты уравнения (9), полученные с использованием МНК.

В ГТИ предложен способ аппроксимации КР с использованием полиномиальной регрессии с ограничениями [11, 12], в котором за счет преобразования данных по МНК подбирается полином на одну степень меньше, чем конечное расчетное уравнение.

Аппроксимирующая функция, удовлетворяющая заданным ограничениям, записывается в следующем виде:

$$Q(H - H_{\text{низш}}) = \mu(H) + \nu(H) g(H - H_{\text{низш}}), \quad (10)$$

где  $\mu(H)$  — полином, отвечающий заданным ограничениям;  $\nu(H)$  — зануляющий полином, гарантирующий выполнение заданных ограничений;  $g(H)$  — полином, подбираемый по МНК.

В порядке первого приближения первым двум полиномам придается вид:

$$\mu(H) = Q(H_{\text{низш}}) = \text{const}, \quad (11)$$

$$\nu(H) = H - H_{\text{низш}}. \quad (12)$$

Подбор аналитической формы полинома  $g(H)$  производится на основе МНК с учетом критериев качества аппроксимации. При этом предварительно осуществляется преобразование исходных данных об ИРВ следующим образом:

$$Y_i = \frac{Q_{ii} - Q(H_{\text{низш}})}{H_{ii} - H_{\text{низш}}}, \quad (13)$$

где  $Q_{ii}$  —  $i$ -тый измеренный расход воды;  $H_{ii}$  — уровень воды, соответствующий измеренному расходу  $Q_{ii}$ .

Таким образом, в ЭВМ вводится совокупность исходных данных в виде  $Y_i$  и соответствующих им преобразованных значений уровней  $(H_{ii} - H_{\text{низш}})$ .

Например, чтобы получить конечное уравнение в виде полинома второй степени к преобразованным данным по МНК подбирается линейное УР в виде:

$$Y_i = a_0 + a_1(H - H_{\text{низш}}). \quad (14)$$

Чтобы получить конечное УР в виде полинома третьей степени к преобразованным данным по МНК подбирается уравнение в виде полинома второй степени:

$$Y_i = a_0 + a_1(H - H_{\text{низш}}) + a_2(H - H_{\text{низш}})^2. \quad (15)$$



После подбора полинома  $g(H)$  параметры расчетного УР пересчитываются по формуле:

$$Q(H) = Q(H_{\text{низш}}) + (H - H_{\text{низш}})(a_0 + a_1(H - H_{\text{низш}}) + a_2(H - H_{\text{низш}})^2 + \dots + a_k(H - H_{\text{низш}})^k). \quad (16)$$

Таким образом, введение ограничений позволяет снизить на единицу степень полинома, который подбирается при аппроксимации КР с использованием МНК, что позволяет определить параметры конечного уравнения с меньшими погрешностями, а, следовательно, уменьшить полосу неопределенности КР.

Рассмотрим примеры аппроксимации годовой КР с использованием различных методов и выполним оценку границ полосы неопределенности полученных зависимостей. Для аппроксимации КР использовались следующие зависимости: УР в форме параболы Глушкова (1) и полиномы с ограничениями второй и третьей степени. В точке  $H_{\text{низш}} = -1,6$  м задано ограничение для расхода воды  $Q(H_{\text{низш}}) = 0$  м<sup>3</sup>/с. При выполнении преобразований переменных  $H$  и  $Q$  и выполнения расчетов по МНК уровни воды  $H$  выражены в м, расходы воды  $Q$  в м<sup>3</sup>/с. Коэффициенты УР  $a_i$ , аппроксимирующих КР для ГП р. Терек — с. Аликазган, приведены в табл. 1. Там же приведены значения стандартных отклонений коэффициентов УР —  $\sigma_{ai}$ .

Таблица 1

Параметры расчетных уравнений, аппроксимирующих кривую расходов воды для ГП р. Терек — с. Аликазган

Parameters of calculation equations approximating the stage-discharge rating curve for station riv. Terek — v. Alikazgan

Метод расчета ЕРВ	Количество ИРВ	Параметры уравнений/среднеквадратические отклонения					
		$a$	$b$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
		$y_a$	$y_b$	$y_{a0}$	$y_{a1}$	$y_{a2}$	$y_{a3}$
полином 2-й степени	38			71,52	78,41	21,06	
				3,07	2,58	1,08	
	19			71,81	78,97	21,30	
				5,29	4,44	1,85	
				68,06	77,09	21,59	
парабола Глушкова	38	30,00	1,83				
		1,01	0,05				
	19	30,83	1,81				
		1,02	0,09				
		26,81	1,92				
полином 3-й степени	38			93,06	63,64	10,93	4,69
				2,46	2,35	1,02	0,14
	19			103,93	55,90	5,88	7,21
				3,71	3,53	1,52	0,20

Метод расчета ЕРВ	Количество ИРВ	Параметры уравнений/среднеквадратические отклонения					
		$a$	$b$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
		$y_a$	$y_b$	$y_{a0}$	$y_{a1}$	$y_{a2}$	$y_{a3}$
полином 3-й степени	13			79,88 3,45	68,89 3,19	15,88 1,36	2,51 0,18

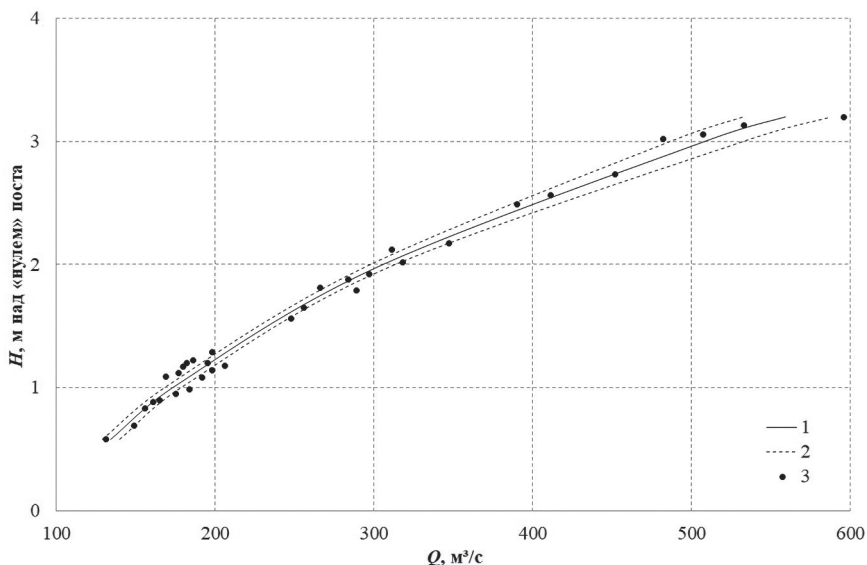


Рис. 2. Зависимость расходов от уровней воды  $Q(H)$  с границами полосы неопределенности, рассчитанная по параболе Глушкова, ГП р. Терек — с. Аликазган по данным ИРВ за 2017 г.  
 1 — зависимость  $Q(H)$ , 2 — границы неопределенности, 3 — измеренные расходы воды.  
 Fig. 2. The stage-discharge relationship with the boundaries of the uncertainty band, calculated from the Glushkov parabola, station riv. Terek — v. Alikazgan from data of measured discharges for 2017  
 1 — dependence  $Q(H)$ , 2 — uncertainty limits, 3 — measured discharge.

Графики полученных зависимостей в форме параболы Глушкова (1) и полинома с ограничениями третьей степени (2) с отображенными границами полосы неопределенности показаны на рис. 2 и рис. 3 соответственно.

По результатам аппроксимации вычисляются значения абсолютных и относительных значений отклонений ИРВ от аппроксимирующего УР по следующим уравнениям:

$$\Delta Q = Q_n - Q(H_n), \tag{17}$$

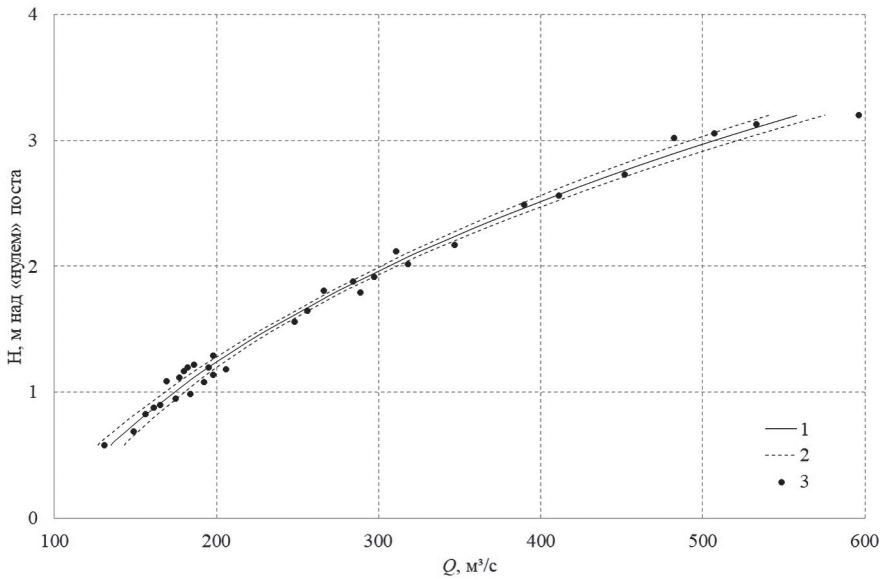


Рис. 3. Зависимость расходов от уровней воды  $Q(H)$  с границами полосы неопределенности, рассчитанная по методу полиномиальной регрессии с ограничениями, ГП р. Терек — с. Аликазган по данным ИРВ за 2017 г.

1 — зависимость  $Q(H)$ , 2 — границы неопределенности, 3 — измеренные расходы воды.

Fig. 3. The stage-discharge relationship with the boundaries of the uncertainty band, calculated by the method of polynomial regression with restrictions, station riv. Terek — v. Alikazgan from data of measured discharges for 2017

1 — dependence  $Q(H)$ , 2 — uncertainty limits, 3 — measured discharge.

$$\tilde{q}_n = \frac{Q_n - Q(H_n)}{Q(H_n)}, \quad (18)$$

где  $Q_n$  — измеренный расход воды,  $Q(H_n)$  — расход воды, полученный по связи  $Q(H)$  для уровня  $H_n$ , зафиксированного во время измерения расхода воды  $Q_n$ .

В методах гидрометрического учета стока, разработанных в ГГИ и рекомендованных для использования на гидрологической сети Росгидромета [13, 14], временной ряд относительных отклонений  $\tilde{q}_n(t)$  рассматривается как основная характеристика изменения пропускной способности русла, отражающая разброс точек ИРВ относительно осредняющей аппроксимирующей зависимости  $Q(H)$ . Изменения пропускной способности русла происходят под воздействием ряда сезонных, гидроморфологических и динамических факторов, таких как: ледовые явления зимой и зарастание в летнюю межень, деформации неустойчивого русла, переменный подпор от впадающих ниже притоков или размещенных в русле гидротехнических сооружений и т. п. По результатам сравнения дисперсии ряда относительных отклонений  $\tilde{q}_n(t)$  ( $\sigma_{\tilde{q}}^2$ ) и дисперсии относительных значений случайных

погрешностей измерения расходов воды ( $\tilde{\sigma}_и^2$ ) выполняется оценка однозначности зависимости  $Q(H)$  (КР) [11, 12], которая является основной предпосылкой для выбора метода гидрометрического учета стока. При наличии однозначной зависимости расходов от уровней воды  $Q(H)$  значения этих дисперсий близки между собой, а, следовательно, разброс точек ИРВ относительно аппроксимирующей зависимости  $Q(H)$  обусловлен только случайными погрешностями измерения расходов воды.

Характеристики рядов относительных отклонений ИРВ от аппроксимирующих КР приведены в графах 4—7 табл. 2. В этой же таблице (графы 9, 10) приведены границы полосы неопределенности для верхней и нижней точек КР, которые выражены в процентах от значения расхода воды по КР. Расчеты и графики (рис. 2, рис. 3) показывают, что наименьшую ширину полоса неопределенности имеет в диапазоне средних значений расходов и уровней воды. В целом более узкая полоса неопределенности получена для варианта аппроксимации КР для ГП р. Терек — с. Аликазган с использованием полинома 3-й степени при заданных ограничениях в точке  $H = -2,3$  м над «нулем» поста,  $Q = 0$  м<sup>3</sup>/с.

Таблица 2

Результаты оценки качества аппроксимации КР разными методами,  
ГП р. Терек — с. Аликазган по данным ИРВ за 2017 г.

The results of evaluating the quality of stage-discharge rating curve approximation by different methods, station riv. Terek — v. Alikazgan from data of measured discharges for 2017

Метод расчета ЕРВ	Число ИРВ	Характеристики относительных отклонений ИРВ от КР-				Относительное среднеквадратическое расхождение ЕРВ по полной и сокращенной совокупностям ИРВ $\sigma_{\Delta Q}$	Ширина полосы неопределенности, %	
		Среднеквадратическое $\sigma_{\tilde{q}}$	Среднее $m_{\tilde{q}}$	$\tilde{q}_{\max}$ со знаком «+»	$\tilde{q}_{\max}$ со знаком «-»		низ КР	верх КР
полином 2-й степени	38	0,07	0,001	0,25	-0,13	0,008	9,5	5,1
	19	0,09	0,002	0,24	-0,13		15,0	8,6
	13	0,06	0,001	0,09	-0,10		0,018	11,8
парабола Глушкова	38	0,07	0,002	0,24	-0,13	0,008	6,0	7,4
	19	0,09	0,004	0,23	-0,14		10,0	12,5
	13	0,06	0,001	0,09	-0,11		0,026	9,1
полином 3-й степени	38	0,06	0	0,15	-0,12	0,017	6,2	3,9
	19	0,06	0	0,12	-0,12		9,1	5,8
	13	0,05	0	0,05	-0,10		0,028	9,4

В ходе исследований по более чем двадцати постам в бассейнах рек Обь, Терек, Сулак и Самур были выполнены численные эксперименты по оптимизации измерений расходов воды. Аппроксимации КР были выполнены по полной и сокращенным в два и три раза совокупностям ИРВ. Относительные значения расхождений ЕРВ, рассчитанных по полученным КР, вычислялись по формуле:

$$\overline{\Delta Q_{1,2}} = \frac{(Q_{c1,2} - Q_n)}{Q_n}, \quad (19)$$

где  $Q_n$  — расход воды, вычисленный по КР, полученной по полной совокупности данных ИРВ ( $n = 38$ );  $Q_{c1,2}$  — расход воды, вычисленный по сокращенным совокупностям при  $n = 19$  и  $n = 13$ .

Относительные среднеквадратические значения расхождений ЕРВ  $\sigma_{\Delta Q}$ , рассчитанных по разным кривым КР приведены в графе 8 табл. 2.

Анализ результатов численных экспериментов показывает, что при оптимально подобранной аппроксимации кривой расходов воды количество ИРВ для ее обоснования может быть сокращено в два или даже три раза без ущерба точности расчета ежедневных расходов воды.

Выполним оценку осредненных по времени характеристик стока, которые получают как среднее арифметическое ЕРВ за период  $T$  (декада, месяц, год).

Погрешности  $\sigma_{\text{epk}}$  осредненных расходов воды  $Q_T$  рассчитываются по закону сложения дисперсий и осреднения их по числу интервалов между измерениями расходов воды ( $n-1$ ):

$$\tilde{\sigma}_T^2 = \sum_{k=1}^{k=n-1} \tilde{\sigma}_{\text{epk}}^2 / (n-1). \quad (20)$$

При равенстве  $\sigma_k$  будем иметь:

$$\tilde{\sigma}_T = \tilde{\sigma}_{\text{epk}} / \sqrt{(n-1)}. \quad (21)$$

При оценке погрешностей характеристик стока, осредненных за длительный период  $T$  (сезон и год), необходимо исходить из тех же предпосылок о статистических свойствах  $\sigma_{\text{ep}}$  и, кроме того, учесть осредненные значения расходов воды  $\overline{Q_i}$  и длительность периодов  $T_i$ , к которым они относятся:

$$\sigma_T = \left[ \sum \left( \left( \left( \frac{t_i}{T} \right) \sigma_{\text{epi}} \right) / (n_i - 1) \right) \right]^{0,5}, \quad (22)$$

где  $n_i$  — количество измерений расходов воды за период  $t_i$ .

При оценке погрешностей осредненных характеристик полезно использовать результаты расчета численных значений погрешностей ЕРВ при различном количестве ИРВ, взятых для обоснования КР  $n$ , и учесть при этом относительные значения водности реки в расчетном периоде. Относительное значение водности определяется параметром  $k_p$ , так называемым модульным коэффициентом:

$$k_i = \overline{Q_i} / \overline{Q_T}, \quad (23)$$

где  $\overline{Q_i}$  — средний расход воды в  $i$ -ом расчетном периоде;  $\overline{Q_T}$  — расход, осредненный за длительный период (сезон, год).

На рис. 4 приведены зависимости относительных погрешностей вычисления ЕРВ от количества ИРВ, принятых для построения КР, и относительных значений расходов воды  $Q/\bar{Q}$  соответственно для многолетней и годовой кривых расходов. На рис. 4 видно, что заметное увеличение погрешности расчета ЕРВ при сокращении количества ИРВ отмечается в диапазоне наименьших расходов воды при  $Q < 0,5\bar{Q}$ .

Результаты расчета погрешностей ежедневных и осредненных за декаду, месяц и год расходов воды, рассчитанных с использованием полной ( $n = 37$ ) и сокращенной ( $n = 13$ ) совокупностей ИРВ для обоснования КР приведены в табл. 3 и табл. 4.

Результаты оценок погрешностей учета стока на ГП р. Терек — с. Аликазган, 2017 г., приведенные в табл. 3 и табл. 4, показывают, что даже при сокращении данных ИРВ, принятых для обоснования однозначной КР 2017 г. в три раза, средние квадратические погрешности ЕРВ, средних декадных и средних месячных значений не превысят 3,3 %, наибольшие, с вероятностью неперевышения 95 %, 7,8 %. Погрешность среднего годового расхода воды составит 1,8 %.

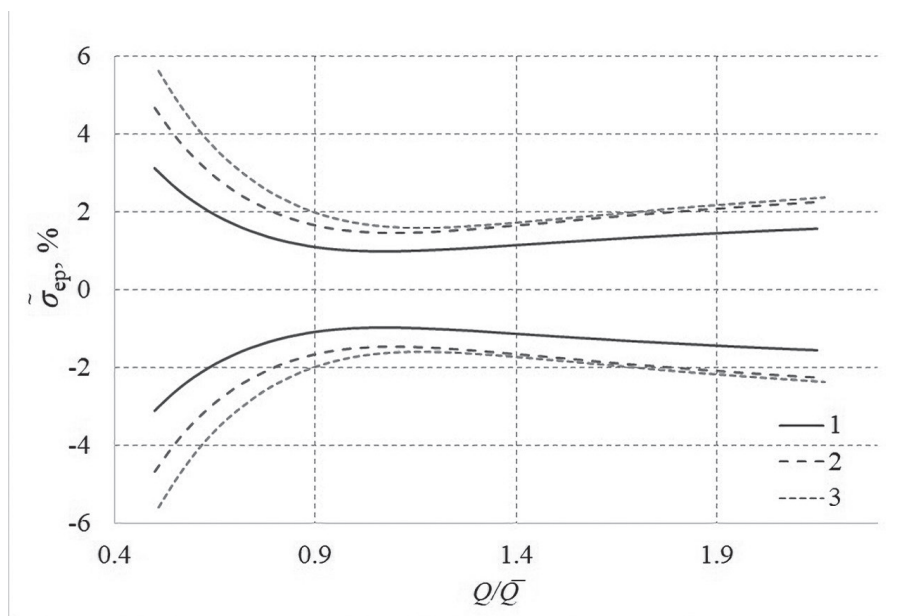


Рис. 4. Зависимость относительных погрешностей вычисления ЕРВ от числа ИРВ  $n$  и относительного расхода воды  $Q/\bar{Q}$ , р. Терек — с. Аликазган, 2017 г.  
1)  $n = 37$ ; 2)  $n = 19$ ; 3)  $n = 13$ .

Fig. 4. Dependence of relative errors of calculation of daily discharges on the number of measured discharges and relative discharge, riv. Terek — v. Alikazgan, 2017  
1)  $n = 37$ ; 2)  $n = 19$ ; 3)  $n = 13$ .

Таблица 3

Оценки погрешностей и границ неопределенности (в %) 95 % вероятности не превышения осредненных характеристик речного стока, рассчитанных по однозначной кривой, обоснованной данными 37 измеренных расходов воды, р. Терек — с. Аликазган, 2017 г.  
Estimates of uncertainty errors and limits 95% of the probability of not exceeding the averaged characteristics of river flow calculated from an unambiguous stage-discharge rating curve justified by data from 37 measured discharges, riv. Terek — v. Alikazgan, 2017

Характеристика стока	$k_i$	$n_i$	ЕРВ, %		Средне-декадные, %		Средне-месячные, %		Средне-годовые, %	
			Среднеквадратическая	Наибольшая, P = 95 %	Среднеквадратическая	Наибольшая, P = 95 %	Среднеквадратическая	Наибольшая, P = 95 %	Среднеквадратическая	Наибольшая, P = 95 %
Межень с 01.01 по 18.05	0,76	9	1,60	3,30	1,60	3,3	1,1	2,3	0,51	1,11
Половодье, паводки с 19.05 по 12.09	1,6	19	1,27	1,85	1,27	1,85	0,64	0,93		
Межень с 13.09 по 31.12	0,68	9	1,75	4,2	1,8	4,2	1,24	2,98		

Таблица 4

Оценки погрешностей и границ неопределенности (в %) 95 % вероятности не превышения осредненных характеристик речного стока, рассчитанных по однозначной кривой, обоснованной данными 13 измеренных расходов воды, р. Терек — с. Аликазган, 2017 г.  
Estimates of uncertainty errors and limits 95% of the probability of not exceeding the averaged characteristics of river flow calculated from an unambiguous stage-discharge rating curve justified by data from 13 measured discharges, riv. Terek — v. Alikazgan, 2017

Характеристика стока	$k_i$	$n_i$	ЕРВ, %		Средне-декадные, %		Средне-месячные, %		Средне-годовые, %	
			Среднеквадратическая	Наибольшая, P = 95 %	Среднеквадратическая	Наибольшая, P = 95 %	Среднеквадратическая	Наибольшая, P = 95 %	Среднеквадратическая	Наибольшая, P = 95 %
Межень с 01.01 по 18.05	0,76	3	2,75	6,60	2,75	6,60	2,75	6,60	1,82	4,32
Половодье, паводки с 19.05 по 12.09	1,6	7	1,90	4,50	1,90	4,50	1,90	4,50		
Межень с 13.09 по 31.12	0,68	3	3,34	7,80	3,34	7,80	3,34	7,80		

### Выводы

В результате выполненных исследований получен алгоритм расчета границ полосы неопределенности кривой расходов воды, который может быть использован для оценки неопределенностей расчета ежедневных расходов воды при подготовке таблиц справочников водного кадастра. Оценка границ полосы неопределенности кривой расходов расширяет возможности при выборе оптимального способа ее аппроксимации и оптимизации измерений расходов воды для

обоснования КР. Численные эксперименты, выполненные по данным более чем двадцати постов в бассейнах рек Обь, Терек, Сулак и Самур, показали, что при оптимально подобранной аппроксимации кривой расходов воды количество ИРВ для ее обоснования может быть сокращено в два или даже три раза без ущерба точности расчета ежедневных расходов воды. Так, при сокращении исходной совокупности ИРВ 2017 г. для ГП Терек — с Аликазган почти в три раза (с 37 до 13) рассчитанные значения среднеквадратических погрешностей ЕРВ увеличились всего на 0,5—1,5 %, среднегодового расхода воды — на 1,5 %; соответствующие погрешности с вероятностью непревышения 95 % увеличились для ЕРВ — менее, чем на 4 %, среднегодового расхода воды — на 3,2 %.

### Список литературы

1. Алексеев Г. А. Методы оценки случайных погрешностей гидрометеорологической информации. Л.: Гидрометеоздат, 1975. 96 с.
2. Dyck S. *Angewandte Hydrologie*. Teil 1. Berlin: Verlag für Bauwesen, 1980. 528 p.
3. Карасев И. Ф., Яковлева Т. И. Методы оценки погрешностей гидрометрического учета стока // *Метеорология и гидрология*. 2001. № 6. С. 96—106.
4. Shiklomanov A. I., T. I. Yakovleva, R. B. Lammers et al. Cold Region River Discharge Uncertainty — Estimates from Large Russian Rivers // *Journal of Hydrology*, 2006. №326. P.231—256. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2005.10.037.
5. ВМО-№ 168. Руководство по гидрологической практике. Том 1. Гидрология: от измерений до гидрологической информации. 6 издание. 2011. 324 с.
6. Grey S. Nearinga, Yudong Tianb, Hoshin V. Guptad et al. A philosophical basis for hydrological uncertainty // *Hydrological sciences journal*. Journal des sciences hydrologiques. 2016. vol. 61. № 9. P. 1666—1678. DOI: 10.1002/wat2.1319.
7. ISO/IEC Guide 98.3:2008. Uncertainty of measurement — Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement, IDT.
8. Baldassarre G. Di and Montanari A. Uncertainty in river discharge observations: a quantitative analysis // *Hydrology and Earth System Sciences*. 2009. vol. 3. P. 913—921. DOI: 10.5194/hessd-6-39-2009.
9. Hamilton A. S. and Moore R. D. Quantifying Uncertainty in Streamflow Records // *Canadian Water Resources Journal*. 2012. vol. 37:1. P. 3—21. DOI: 10.4296/cwrj3701865.
10. McMahon T. A. and Peel M. C. Uncertainty in stage-discharge rating curves: application to Australian Hydrologic Reference Stations data // *Hydrological Sciences Journal*. 2019. vol. 64:3. P. 255—275. DOI: 10.1080/02626667.2019.1577555.
11. Карасев И. Ф., Яковлева Т. И. Усовершенствованные методы гидрометрического учета стока // Доклады VI Всероссийского гидрологического съезда. Секция 1. М.: Метеоагентство Росгидромета. 2006. С. 156—163.
12. Изьюрова Ю. В. Развитие методов гидрометрического учета и увязки стока / Ю. В. Изьюрова, Т. И. Яковлева // *Метеорология и гидрология*. 2024. № 1. С. 48—57. – DOI: 10.52001/0130-2906-2024-1-48-57.
13. Карасев И. Ф., Винников С. Д., Кучеренко О. Е. Экстраполяция максимальных расходов воды при нестационарном движении руслового потока // *Ученые записки Российского государственного гидрометеорологического университета*. 2012. № 25. С. 20—25.
14. Себер Дж. *Линейный регрессионный анализ*. М.: Мир, 1980. 456 с.
15. Крамер Г. *Математические методы статистики*. М.: Мир, 1975. 648 с.

### References

1. Alekseev G. A. *Metody otsenki sluchainykh pogreshnostei gidrometeorologicheskoi informatsii = Methods for estimating random errors of hydrometeorological information*. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1975; 96 p. (In Russ.).
2. Dyck S. *Angewandte Hydrologie*. T. I. Berlin, 1976; 512 p.



3. Karasev I. F., Iakovleva T. I. Methods for estimating errors in hydrometric flow accounting. *Meteorologiya i gidrologiya = Meteorologiya i gidrologiya*, 2001; (6): (96—106). (In Russ.).
4. Shiklomanov A. I., T. I. Yakovleva, R. B. Lammers et al. Cold Region River Discharge Uncertainty — Estimates from Large Russian Rivers. *Journal of Hydrology*. 2006; (326): (231—256).
5. VMO-№ 168. Guide to Hydrological Practices, Volume I. Management of Water Resources and Applications of Hydrological Practices. 6 izdanie. 2011; 1.2-14 p. (In Russ.).
6. Grey S. Nearinga, Yudong Tianb, Hoshin V. Guptad et al. A philosophical basis for hydrological uncertainty. *Hydrological sciences journal — Journal des sciences hydrologiques*. 2016; (9): 1666—1678.
7. ISO/IEC Guide 98.3:2008. Uncertainty of measurement — Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement, IDT.
8. Baldassarre G. Di and Montanari A. Uncertainty in river discharge observations: a quantitative analysis. *Hydrology and Earth System Sciences*. 2009; (3): (913—921).
9. Hamilton A. S. and Moore R. D. Quantifying Uncertainty in Streamflow Records. *Canadian Water Resources Journal*. 2012; 37 (1): (3—21).
10. McMahan T. A. and Peel M. C. Uncertainty in stage-discharge rating curves: application to Australian Hydrologic Reference Stations data. *Hydrological Sciences Journal*. 2019; 64 (3): (255—275). doi: 10.1080/02626667.2019.1577555
11. Karasev I. F., Iakovleva T. I. Improved methods of hydrometric flow accounting. *Doklady VI Vserossiiskogo gidrologicheskogo s'ezda. Sektsiya I. = Reports of the VI All-Russian Hydrological Congress. Section I*. 2006; (156—163). (In Russ.).
12. Iz'yurova YU. V., Yakovleva T. I. Development of methods for hydrometric computation and coordination of streamflow. *Meteorologiya i gidrologiya = Meteorologiya i gidrologiya*, 2024 (1): (48—57). (In Russ.).
13. Karasev I. F., Vinnikov S. D., Kucherenko O. E. Extrapolation of maximum water flows during unsteady movement of channel flow. *Uchenye zapiski RGGMU = Scientific notes of the Russian State Hydrometeorological University*. 2012; (25): (20—25). (In Russ.).
14. Seber Dzh. *Lineinyi regressionnyi analiz = Linear regression analysis*. Moscow: Mir, 1980; 456 p. (In Russ.).
15. Kramer G. *Matematicheskie metody statistiki = Mathematical methods of statistics*. Moscow: Mir, 1975; 648 p. (In Russ.).

### **Информация об авторах**

*Аксянов Тимур Менирович*, научный сотрудник отдела гидрометрии и гидрологической сети Федерального государственного бюджетного учреждения «Государственный гидрологический институт», [agon1982@mail.ru](mailto:agon1982@mail.ru).

*Яковлева Татьяна Ивановна*, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, зав. отдела гидрометрии и гидрологической сети Федерального государственного бюджетного учреждения «Государственный гидрологический институт», [tiya-ilichovo@yandex.ru](mailto:tiya-ilichovo@yandex.ru).

### **Information about authors**

*Aksyanov T. M.*, Federal State Budgetary Institution “State Hydrological Institute”, Department of Hydrometry and Hydrological Network, Scientific researcher.

*Yakovleva T. I.* Federal State Budgetary Institution “State Hydrological Institute”, Department of Hydrometry and Hydrological Network, Leading Researcher.

**Конфликт интересов:** конфликт интересов отсутствует.

*Статья поступила 11.03.2024*

*Принята в печать после доработки 21.07.2024*

*The article was received on 11.03.2024*

*The article was accepted after revision on 21.07.2024*