ГЕОФИЗИКА

УДК 532.5:51-72 doi 10.33933/2074-2762-2020-59-7-27

О корректном использовании математических конструкций в физических моделях

М.Ю. Белевич

Институт океанологии РАН им. П.П. Ширшова, Москва
Российский государственный гидрометеорологический университет, Санкт-Петербург, mbelevich@yahoo.com

Обсуждаются физические ограничения, которым должны удовлетворять математические конструкции, используемые при разработке и модификации математических моделей. Все рассуждения иллюстрируются примерами из механики жидкости. Рассматриваются следующие темы: средства описания; корректный подход к модификации модели и физический смысл этапов построения модели и некоторые другие. Описываемые физические ограничения нередко остаются без должного внимания, что порой приводит к различным нежелательным последствиям. Это может быть чрезмерное усложнение задачи, неявная подмена заявленной задачи другой или, наконец, отсутствие решения у сформулированной проблемы.

Ключевые слова: математическая модель, физический смысл.

On the correct use of mathematical constructions in physical models

M. Belevich

Shirshov Institute of Oceanology of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Russian State Hydrometeorological University, Saint Petersburg, Russia

The physical limitations of the mathematical constructions used in developing or modifying mathematical models are discussed. All reasonings are illustrated by examples from fluid mechanics. The following topics are considered: means of description; correct approach to model modification and the physical meaning of model development stages.

In the first case, the method of describing physical objects using numbers as well as corresponding restrictions are investigated, followed by developing general recommendations on procedures for modifying mathematical models of fluid dynamics. The well-known procedure of averaging the viscous fluid model equations to obtain the turbulent fluid model is used as an illustration. Since we are considering the models of physical phenomena, it is natural to provide physical interpretation for each stage of model development. Unfortunately, some of the transformations used are often treated as purely technical tricks, therefore denoting the lack of the physical meaning in such cases, which does not make a mathematical procedure unacceptable, but does mark out the model's place which requires reasonable interpretation. In this paper, we are considering two variants of this kind of interpretation, namely the case of using imaginary quantities, and the case of applying integral transformations.

Meanwhile, all the above-mentioned restrictions are not always given due attention. Sometimes this leads to various undesirable consequences, including excessive task complication, implicit substitution of a declared problem with another one, or, finally, lack of solution to the formulated problem.

Keywords: mathematical model, physical meaning.

For citation: *M. Belevich.* On the correct use of mathematical constructions in physical models. *Gidrometeorologiya i Ekologiya.* Hydrometeorology and Ecology (Proceedings of the Russian State Hydrometeorological University). 2020. 59: 7—27. [In Russian]. doi: 10.33933/2074-2762-2020-59-7-27

1. Введение

Несмотря на существование многих удачных математических моделей физических явлений, продолжают строиться новые модели и модифицироваться старые. Делается это, однако, не всегда корректно. В силу того что математические модели призваны описывать физические явления, они должны учитывать также определенные ограничения, которые накладывает физика рассматриваемых процессов на используемые математические конструкции. В первую очередь это связано со средствами описания, т. е. с числами, которые ставятся в соответствие физическим характеристикам. Чаще всего такие средства являются не просто числами, но числами, снабженными размерностью, и это предъявляет определенные требования к используемым математическим конструкциям. Другим общим ограничением является требование существования так называемого физического смысла на каждом этапе построения математической модели физического явления и т. п. К сожалению, иногда эти и другие ограничения во внимание не принимаются, что не может не сказаться на строящейся модели, формулируемой задаче и в конечном счете на ее решении или даже его существовании.

Поучительный пример подобного рода проанализирован в работе [1].

Различные ограничения математических конструкций в настоящей работе рассматриваются на примере модели движущейся жидкости. При этом важно иметь в виду, что здесь исследуется именно корректное построение математической модели, а не те или иные способы решения задач, связанных с подобной моделью.

Таким образом, с одной стороны, целью работы является демонстрация различных аспектов общей проблемы, которая заключается в вольном применении математических средств без должного учета их определений и физических ограничений. С другой стороны, здесь же рассматриваются возможные варианты разрешения указанной проблемы.

К числу обсуждаемых тем относятся:

— описание свойств физических объектов числами;

— различие между измеримыми (интегральными) и неизмеримыми (дифференциальными) характеристиками физических объектов;

— этапы построения моделей и их корректные модификации;

— физический смысл промежуточных шагов построения математических моделей.

Построение математической модели любого физического явления осуществляется путем выполнения ряда этапов, каждый из которых можно представить в виде следующей последовательности действий:

1) наблюдение явления и поиск наиболее значимой закономерности, которой подчиняются характеристики описываемого явления, т. е. поиск так называемого закона природы;

2) формулировка постулата, соответствующего найденному закону природы;

3) вывод уравнения модели, основанного на сформулированном постулате.

В случае если строящаяся модель явления оказывается незамкнутой (неизвестных величин больше, чем уравнений в модели), весь цикл указанных выше действий (1—3) повторяется до тех пор, пока не будет получена замкнутая система уравнений.

Здесь важно обратить внимание на следующее. Во-первых, если постулаты формулируются на основе законов природы, т. е. закономерностей, извлеченных из данных измерений, то это означает, что они определяют соотношения между интегральными параметрами физических объектов, поскольку именно интегральные параметры доступны измерению. Во-вторых, при построении модели, базирующейся на нескольких законах природы, искомые функции вводятся последовательно, а не все сразу, одновременно. С каждым очередным постулатом связано появление некоторых новых искомых переменных (обычно одной). И, в-третьих, все постулаты, составляющие модель явления, независимы, и, следовательно, каждый из них может рассматриваться вне зависимости от того, сформулированы остальные постулаты или еще нет. Надо отметить, что исследований, специально посвященных обсуждению упомянутой проблемы, обнаружить в литературе не удалось. Часть из рассматриваемых здесь вопросов впервые затрагивалась в [2].

Структура предлагаемой работы такова. В п. 2 обсуждаются способы описания характеристик физических объектов числами и следующие из этого ограничения. Далее рассматривается последовательность определения (включения в модель) искомых переменных, обусловленная этапами создания модели, что, в свою очередь, очерчивает круг допустимых процедур, которые могут быть использованы в дальнейшем. В качестве иллюстрации используется широко применяемая процедура осреднения. Эти вопросы обсуждаются в п. 3. Ограничения, связанные с существованием физического смысла на каждом этапе построения модели, рассматриваются в п. 4. К сожалению, некоторые из применяемых процедур нередко трактуются как чисто технические приемы, и вопрос о физическом смысле в этом случае не ставится, что, по моему мнению, неверно. Отсутствие физического смысла некоторой математической процедуры, разумеется, не делает ее недопустимой, но помечает место, требующее разумной интерпретации. В п. 4 предлагается такая интерпретация некоторых используемых математических конструкций. Полученные результаты подытоживаются в п. 5.

2. Средства описания

2.1. «Физические числа»

Потребность в объективном описании явлений и оценках характеристик физических объектов привела в свое время к поиску универсальных средств описания, не зависящих от времени, места и наблюдателя. Такое средство было найдено, и им оказались числа. Для того чтобы математическую модель можно было построить, в первую очередь требуется снабдить свойства объекта или явления физического мира числовыми эквивалентами, характеризующими эти свойства однозначно. Абсолютной связи между числом и каким-либо свойством физического объекта не существует, но всегда можно задать связь относительную.

Намереваясь охарактеризовать вещественным числом некоторое наблюдаемое свойство физического объекта (скажем, протяженность в пространстве), выбирают объект, обладающий аналогичным свойством (в данном случае протяженностью), рассматривают его как эталонный объект и связывают с этим свойством эталона число 1. Сравнение изучаемого объекта с выбранным эталоном позволяет далее указать, во сколько раз рассматриваемое свойство этого объекта отличается от эталонного. Такое сравнение дает возможность охарактеризовать наблюдаемое свойство объекта вещественным числом.

Переход к числам, таким образом, происходит по следующей схеме:

1) выбор свойства П, подлежащего численной оценке;

2) выбор эталона E и оценка рассматриваемого свойства эталона $\Pi(E)$ числом*

$$Num\big(\Pi(E)\big)=1, \tag{1}$$

3) оценка того же свойства $\Pi(B)$ у изучаемого объекта B путем сравнения с эталоном

$$Num\big(\Pi(E)\big)\cdot\Pi(B)=Num\big(\Pi(B)\big)\cdot\Pi(E) \tag{2}$$

или, с учетом (1),

$$\Pi(B)=Num\big(\Pi(B)\big)\cdot\Pi(E). \tag{3}$$

Здесь, первый пункт — указание того, что надлежит измерять, второй — выбор единицы измерения, а третий — собственно измерение**. Величина $Num\big(\Pi(B)\big)\in \mathrm{R}^1$ — число, которое ассоциируется с $\Pi(B)$, т. е. со свойством П физического объекта B; $\Pi(E)$ — аналогичное свойство эталона. При этом $\Pi(E)\in \mathrm{SU}$, где SU — система единиц измерения, т. е. совокупность независимых друг от друга эталонных свойств, выбранных для оценки соответствующих свойств объектов.

Из формулы (3) следует, что со свойством физического объекта $\Pi(B)$ фактически ассоциируется не вещественное число, элемент R^1, а пара (число, эталон) = $\big(Num\big(\Pi(B)\big),\Pi(E)\big)$, которая является элементом прямого произведения $\mathrm{R}^1\times\mathrm{SU}$. Последнее обеспечивает однозначность сопоставления физической характеристике числового эквивалента. И поскольку этот эквивалент является не числом, а парой (число, эталон), его можно было бы назвать «физическим числом», т. е.

* Использовать, разумеется, можно любое вещественное число из множества вещественных чисел R^1, но единица — простейший и наиболее удобный вариант.

** Если под свойством П понимать, например, длину, то формула (3) читается буквально так: длина B равна Num длинам E.

числом, снабженным физической размерностью, каковой является название выбранного эталона.

Легко видеть, что в выражении (2) тело B и эталон E совершенно равноправны, что естественно, поскольку выбор в качестве эталона именно тела E обусловливается некими внешними причинами.

2.2. Величины измеряемые (меры) и вычисляемые (плотности)

Описанный выше переход к числам связан с измерениями. Все измеряемые свойства тел всегда характеризуют некоторое множество точек тела, рассматриваемого как единое целое. Такие свойства называются *интегральными параметрами* тела. Масса, объем, заряд, энергия — все это примеры измеряемых (интегральных) параметров. Интегральные параметры описываются так называемыми *мерами*, т. е. аддитивными функциями множеств (см., например, [3]), некоторые свойства которых эти параметры характеризуют.

Часто интерес представляют не только интегральные параметры, но и их распределение в исследуемом теле. В этом случае реальные физические тела моделируются так называемой сплошной средой, которая возникает в результате применения *гипотезы сплошности* к достаточно большой совокупности частиц, микроскопических по сравнению с масштабами изучаемого явления. Каждое дискретное физическое тело (например, совокупность молекул или звездное скопление), рассматриваемое как сплошная среда, заменяется континуумом точек, что дает возможность описывать свойства тела гладкими функциями (т. е. функциями, имеющими нужное число производных), определенными на этом континууме. Индивидуальность реальных частиц, составляющих тело, при этом теряется, и эволюция их свойств, таким образом, не изучается.

Любой интегральный параметр сплошной среды всегда характеризует континуум точек. Поскольку его значение в любой точке равно нулю, для математического описания свойств тел в точках вместо интегральных параметров используются их *плотности* или *дифференциальные (локальные) параметры*. Любой дифференциальный параметр определяется как предел отношения двух интегральных параметров, т. е. по существу является производной одной меры по другой (см. [4]). Формально это можно определить следующим образом.

Пусть $P_1 \subset B$ — часть тела B. Пусть P_2, в свою очередь, часть P_1, т. е. $P_2 \subset P_1$. И так далее. Построим цепочку $B \supset P_1 \supset P_2 \supset \ldots \supset P_k \supset \ldots \supset X$ такую, что все части P_k имеют только одну общую точку X. Пусть на теле B определены меры Π^1 и Π^2. Соответственно, они определены и на частях P_k этого тела. Дифференциальный параметр π_{12} в точке X, т. е. производная меры Π^1 по мере Π^2 в этой точке определяется выражением

$$\pi_{12}(X) \equiv \lim_{k\to\infty} \frac{\Pi^1(P_k)}{\Pi^2(P_k)}.$$

Учитывая (3) для $\pi_{12}(X)$, получаем:

$$\pi_{12}(X)=\lim_{k\to\infty}\frac{Num\left(\Pi^1(P_k)\right)\cdot\Pi^1(E_1)}{Num\left(\Pi^2(P_k)\right)\cdot\Pi^2(E_2)}=Num\left(\pi_{12}(X)\right)\cdot\frac{\Pi^1(E_1)}{\Pi^2(E_2)}, \qquad (4)$$

где E_1 и E_2 суть соответствующие эталоны, а числовой множитель $Num\left(\pi_{12}(X)\right)$ обозначает

$$Num\left(\pi_{12}(X)\right)\equiv\lim_{k\to\infty}\frac{Num\left(\Pi^1(P_k)\right)}{Num\left(\Pi^2(P_k)\right)}.$$

Как видим, наряду с интегральными параметрами дифференциальные также ассоциируются с «физическими числами», однако их физические размерности оказываются дробными. Часто в качестве меры $\Pi^2(\cdot)$ используется объем и, обычно именно в этом случае соответствующая функция точки называется плотностью рассматриваемого интегрального параметра; однако возможны и иные варианты. Например, если $\Pi^2(\cdot)$ интерпретируется как временной интервал, тогда $\pi_{12}(X)$, называется скоростью изменения $\Pi^1(\cdot)$. В табл. 1 представлены примеры локальных параметров.

Таблица 1

Примеры локальных параметров

Examples of local parameters

Плотность	Отношение эталонов	Размерность в системе СИ
Скорость	L/T	метр/секунда
Плотность массы	M/L^3	килограмм/метр^3
Удельный объем	L^3/M^1	метр^3/килограмм
Давление	$M/\left(LT^2\right)$	килограмм/(метр · секунда^2)

В этих примерах приведены размерности локальных параметров, т.е. $\dfrac{\Pi^1(E_1)}{\Pi^2(E_2)}$ (см. выражение (4)). Все они записываются как отношения единиц измерения (эталонов) соответствующих интегральных параметров. Несколько сложнее выглядит последний пример, однако и здесь имеется такое же отношение интегральных параметров. В отличие от измеряемых интегральных параметров среды дифференциальные параметры не измеряются в принципе. Они всегда вычисляются.

2.3. Ограничения в силу средств описания

Средства описания накладывают некоторые ограничения на возможные математические конструкции, используемые при построении моделей физических объектов. Простейшим ограничением такого рода является требование однородности математического выражения по размерности. Необходимость этого ограничения становится очевидной, если на место обычно записываемых числовых функций *Num*(Π(*B*)) или *Num*(π(*X*)) подставлять пары в соответствии с (3) или (4). При отсутствии однородности по размерности размерные множители не удастся вынести за скобку и сократить. Само выражение в этом случае будет зависеть от используемых эталонов, что неверно и чего быть не должно.

Другим примером указанного ограничения может служить построение безразмерных комбинаций размерных величин. Так, если аргумент функции (например показательной, логарифмической и т. п.) представляет собой произведение размерных величин, то их размерности не могут быть произвольными, а должны обеспечивать безразмерность всего произведения. В противном случае математическое выражение будет лишено физического смысла, так как его значение будет зависеть от использованных эталонов и потому должно быть признано ошибочным. Такого рода грубые ошибки, как правило, не встречаются, однако часто встречается другая ошибка, также связанная с размерностью. Речь идет о работе с некоторыми интегральными преобразованиями (в частности, с преобразованием Фурье) и их физическими интерпретациями.

Интегральные преобразования (и преобразование Фурье в их числе) — часто используемый прием решения задач математической физики и метод получения уравнений, описывающих спектральные свойства изучаемого явления (см., например, [5, 6]).

В качестве иллюстрации рассмотрим многомерное преобразование Фурье-функции $f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_j \in \mathrm{R}^1$. Фурье-образ указанной функции имеет вид

$$F(\mathbf{k}) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$, $k_j \in \mathrm{R}^1$. В сугубо математических работах (где ни о каких размерных величинах речь не идет) обычно считается, что **k** и **x** являются элементами *n*-мерного евклидова пространства, т. е. векторного пространства* с определенным на нем скалярным произведением**, а выражение **k · x** в показателе экспоненты таким скалярным произведением и считается (см., например, [7, 8] и др.).

В физических работах подобная интерпретация этого выражения, вообще говоря, неприемлема, поскольку переменная **x** обычно имеет некоторую физическую размерность [**x**], в то время как выражение **k · x** должно быть безразмерным $\left([\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}] = 1\right)$. Отсюда следует, что размерность переменной **k** должна быть обратной размерности [**x**], т. е. $[\mathbf{k}] = [\mathbf{x}]^{-1}$, и, таким образом, величины **x** и **k** имеют разный физический смысл и оказываются элементами разлных векторных

* Векторное пространство определяется как множество, для элементов которого указаны операции сложения элементов и умножения их на числа, результаты которых являются элементами того же множества.

** Скалярным произведением называется билинейная числовая функция, определенная на элементах векторного пространства.

пространств. Между тем скалярное произведение определено для элементов одного и того же векторного пространства (см., например, [9]). Это, в частности, означает возможность вычисления суммы двух произвольных элементов такого пространства, что из физических соображений в данном случае, очевидно, не имеет места, но что совершенно необходимо для описания, скажем, векторных величин их компонентами.

Отдельной проблемой является случай использования недекартовых координат, т. е. случай, когда точка $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ считается заданной координатами, отличными от декартовых. Пример такого рода приведен в монографии [10, с. 198], где рассматривается случай сферических пространственных координат. Однако с учетом сказанного выше рассуждения автора [10] вызывают сомнения. Кроме того, в этом случае остается неясной геометрическая интерпретация компонент волнового вектора.

Обсуждение этой проблемы и подхода к ее решению см. далее в п. 4.2.

3. Модификация модели физического явления

3.1. Построение модели явления и ее модификация

Построение любой модели складывается из последовательности этапов, каждый из которых связан с поиском очередного «закона природы», формулированием соответствующего ему постулата, выводом следующего из этого постулата уравнения и (возможным) определением новых искомых переменных. Вся последовательность заканчивается получением замкнутой системы уравнений модели, описывающей эволюцию некоторой совокупности свойств реального физического объекта.

Такая модель, как и любая другая, имеет свою область применения, за пределами которой она не работает. Чтобы расширить область применения, требуется построить новую модель. На первый взгляд, тут существуют два варианта действий. Можно проделать весь путь построения модели заново, по ходу дела внося изменения в то, что должно выглядеть по-новому. А можно, и это наиболее часто используемый вариант, взять уже готовую модель и внести в нее поправки, необходимые для расширения области применения. Второй подход, хотя и выглядит естественным, не всегда применяется корректно.

Если формулировка требуемых изменений возможна лишь в том случае, когда исходная модель полностью построена*, тогда оба варианта эквивалентны. Однако, если планируемое изменение может быть сформулировано уже на каком-то промежуточном этапе, указанные варианты оказываются различными, а сам этот этап помечает ту часть модели, которая может подвергнуться модификации. Иными словами, видоизменить можно лишь те переменные и уравнения, которые на данный момент имеются в модели. То, что модель еще не завершена, препятствием для модификации не является, поскольку все постулаты модели независимы и могут рассматриваться отдельно друг от друга. Остальные переменные и уравнения,

* Скажем, для этого требуется весь список искомых функций, который формируется лишь в конце построения модели.

возникающие на следующих этапах, также могут измениться, но уже вследствие осуществленной модификации. Легко видеть, что описанное проведение модификации эквивалентно построению модифицированной модели «с нуля», т. е. первому варианту. При этом постулаты исходной модели сохраняют свою независимость, как и должно быть.

На практике же обычно происходит иначе. Модификации подвергается вся исходная модель, даже в тех случаях, когда планируемое изменение может быть осуществлено на каком-либо промежуточном этапе. При этом исходная последовательность этапов построения модели нарушается, и независимость постулатов, образующих исходную модель, утрачивается. Результаты могут быть самыми неожиданными (см. [1] и нижеследующий пример).

3.2. Модификация модели вязкой жидкости

В качестве примера рассмотрим получение модели турбулентной жидкости путем модификации модели вязкой жидкости. Построение исходной модели осуществляется в четыре этапа, каждый из которых связан с выводом очередного дифференциального уравнения модели (табл. 2).

Таблица 2

Этапы построения модели вязкой жидкости

Viscous Fluid Model developing stages

Этап	Постулат	Уравнение	Искомые функции
1		Сохранение массы	
	$d_t M = 0$	$d_t\rho + \rho(\nabla, \vec{v}) = 0$	$\rho, \vec{v}$
2		Баланс импульса и определение тензора напряжений	
	$d_t\mathbf{m} = \mathbf{f}$	$\rho d_t\vec{v} = -\nabla p + 2\mu \mathrm{div}\mathsf{D}$	$(\rho, \vec{v}), p$
3		Баланс энергии и определение температуры	
	$d_t Energy = W + Q$	$d_t T = \kappa\Delta T$	$(\rho, \vec{v}, p), T$
4		Уравнение состояния	
		$\rho = \rho(p, T)$	$\rho, \vec{v}, p, T$

В таблице использованы следующие обозначения.

Для интегральных параметров тела: M — масса, $\mathbf{m}$ — импульс, $\mathbf{f}$ — действующая сила, $Energy$ — полная энергия, W — мощность действующей силы, Q — скорость нагрева.

Для дифференциальных параметров: ρ — плотность массы, $\vec{v}$ — скорость изменения места, p — давление, T — температура. В скобки заключены параметры, введенные на предыдущих этапах построения модели.

Кроме того, используются обозначения: t — время, μ — коэффициент динамической вязкости, κ — коэффициент температуропроводности, D — тензор скоростей деформации.

Модель турбулентной жидкости должна явно воспроизводить крупномасштабную (по сравнению с масштабами турбулентности) часть движений жидкости и параметрически учитывать мелкомасштабную часть движений (турбулентность). Иными словами, уравнения модифицированной модели должны, по замыслу, описывать осредненное движение точек среды вдоль сглаженных траекторий.

3.2.1. Стандартный подход

Любая модель, содержащая более одного постулата, создается поэтапно. Порядок, в соответствии с которым формулируются и используются постулаты, задает порядок определения и введения в модель искомых неизвестных величин. В том случае, когда построенная модель в дальнейшем модифицируется, в качестве объекта модификации обычно выступает уже полностью сформулированная модель. Другими словами, сначала строится первоначальный вариант модели, выводятся все уравнения и определяются (вводятся) все неизвестные, а затем вся эта замкнутая система уравнений подвергается модификации.

В обычно применяемой процедуре осреднения уравнений модели вязкой жидкости выполняются следующие шаги.

1. Все искомые переменные (обозначим их здесь буквами f_k) независимо друг от друга рассматриваются как случайные процессы (см., например, [11]).

2. Они записываются в виде суммы $f_k = \overline{f_k} + f_k'$ средней (сглаженной) $\overline{f_k}$ компоненты и случайной (флуктуирующей) f_k' составляющей.

3. После подстановки таких сумм в дифференциальные уравнения модели уравнения осредняются.

4. В качестве оператора осреднения используется линейный непрерывный проектор, удовлетворяющий условиям Рейнольдса.

В результате все нелинейные слагаемые порождают новые члены (ниже такой новый член обведен рамочкой):

$$\overline{f_k f_n} = \overline{f_k}\,\overline{f_n} + \boxed{\overline{f_k' f_n'}}.$$

Здесь надчеркиванием обозначено осреднение.

Такой подход приводит к труднообозримым выражениям с большим числом новых неизвестных функций и потому в «чистом» виде не используется. Вместо этого непосредственно перед осреднением принимается ряд упрощающих гипотез (типа несжимаемости среды, приближения Буссинеска и т. п.; см., например, [10,11] и др.), после чего фактическому осреднению подвергаются лишь компоненты скорости. В результате первыми двумя уравнениями модели турбулентной жидкости оказываются уравнение неразрывности несжимаемой среды и уравнение Рейнольдса. Описываемая процедура осреднения, таким образом, на деле не является общей и может быть использована лишь в том случае, когда удается сформулировать указанные упрощения.

3.2.2. Альтернативный подход

Взглянем на проблему осреднения с иных позиций. Прежде всего, примем во внимание то, что в отличие от потенциально измеряемых интегральных параметров среды локальные характеристики (плотности, скорости и т. п.), определенные в точке, являются принципиально не измеряемыми[*] и должны вычисляться в соответствии с их определением и налагаемыми связями, т. е. системой уравнений (пример изменения локальных параметров при изменении уравнений модели в результате осреднения см. ниже, в п. 5). Отсюда следует, что исходные гидромеханические поля, какими бы изменчивыми они не были, в действительности не являются независимыми. Напротив, они тесно связаны друг с другом, и их связь задается некоторой системой уравнений. Все это означает, что случайное возмущение в любом из них порождает возмущения в остальных. При этом порождаемые возмущения таковы, что все поля по-прежнему удовлетворяют указанной системе уравнений. Другими словами, обсуждаемые возмущения не являются случайными и в отсутствие исходного возмущения тождественно равны нулю.

Если одно из гидромеханических полей выбрать в качестве независимого и именно у него допустить наличие случайной составляющей, тогда остальные поля, функционально с ним связанные, будут также содержать случайную составляющую. Напротив, остальные поля могут считаться гладкими (т. е. не содержащими случайной составляющей), если они вычисляются по сглаженному полю независимой величины. Такой величиной, очевидно, удобно считать некую первичную характеристику среды (в смысле очередности их появления при построении модели). Описываемый способ построения модифицированной модели использован в [1].

При построении модели жидкости исходными представлениями служат не зависящая от времени масса жидкости M и ее объем $V(t)$ (см., например, [12]). Можно легко показать, что скорость изменения объема $d_t V$ определяется векторным полем скорости $\vec{v}$. Так, если в некоторый отсчетный момент времени t_0 объем жидкости есть V_0, то текущий объем вычисляется по формуле $V(t) = \int_{V_0} J dV$, где J — якобиан преобразования эйлеровых переменных в лагранжевы. Скорость изменения объема равна $d_t V = \int_{V_0} d_t J\, dV = \int_V \frac{1}{J} d_t J\, dV$. Поскольку в произвольной точке жидкости справедливо соотношение[**]

[*] Повсеместно используемое экспериментальное определение, т. е. измерение, различных локальных параметров (скорости, плотности, температуры, давления и т.п.) не должно вводить в заблуждение. В каждом таком случае измеряется отнюдь не предел отношения мер (интегральных параметров) в некоторой точке континуума, т. е. не то, чем является локальный параметр по определению, а отношение мер малых, но конечных объемов реальных жидкостей. Поскольку любой такой объем всегда содержит бесконечно много точек среды, каждое измерение само фактически является осреднением по этому объему.

[**] См., например, [13] или [14].

$$\frac{1}{J}d_tJ = \mathrm{div}\vec{v}, \qquad (5)$$

имеем

$$d_tV = \int_V \mathrm{div}\vec{v}dV. \qquad (6)$$

Обратим внимание на то, что задача осреднения или разделения движений по масштабам может быть поставлена уже на этом шаге разработки модели, хотя ни плотность массы, ни плотности сил еще не были введены в рассмотрение и определены.

Таким образом, единственной зависящей от времени мерой, которая может содержать случайную компоненту, является объем жидкости. В соответствии с выражением (6) его эволюция определяется полем скорости. Вектор скорости $\vec{v}$ и якобиан J и есть те локальные характеристики движущейся жидкости, которые могут рассматриваться как первичные (в указанном выше смысле), в отличие от плотности массы, давления и т. п. Поскольку движущаяся среда обычно описывается в терминах скорости, удобно использовать скорость среды в качестве той характеристики, которая подвергается осреднению (тем более что это соответствует сложившейся практике). Иными словами, разумным выбором осредняемой характеристики представляется поле скорости точек жидкости. Остальные характеристики (плотность массы, давление и т. д.) вычисляются по сглаженному полю скорости, а потому не содержат случайных составляющих, и осреднению подвергаться не должны.

4. Физический смысл этапов построения модели

Поскольку в данной работе рассматриваются математические модели физических явлений, т. е. системы уравнений, допускающие физическую интерпретацию как самих уравнений, так и их решений, подобную же интерпретацию должен допускать и каждый шаг, выполняемый при построении модели. Это, однако, имеет место не всегда. Два характерных примера будут специально рассмотрены ниже.

В первую очередь это касается мнимых и комплексных чисел. Теория функций комплексных переменных предоставляет исследователю немало средств для решения стоящих перед ним задач, которые, будучи достаточно мощными, вместе с тем могут рассматриваться лишь как технические приемы, не имеющие физического смысла.

Другим примером такого рода могут служить различные интегральные преобразования. С физической интерпретацией лучше всего дело обстоит, видимо, у преобразования Фурье. Однако и здесь само преобразование по сути является техническим приемом.

4.1. Физический смысл мнимых величин

В классической физике комплексные числа не используются как средства описания. Их начинают применять в специальной теории относительности (см., например, [15]), но сами числа не несут при этом никакого физического смысла, оставаясь техническим средством. Однако в статье [16] и ряде других они вводятся в модель для решения определенных технических проблем при задании координат в пространственно-временном континууме (пространстве событий) и при этом наделяются вполне очевидным физическим смыслом. Вот как это делается в упомянутой работе, посвященной построению причинно-обусловленной модели жидкости.

Будем рассматривать пространство событий W как прямое произведение мировой линии наблюдателя и трехмерного пространства одновременных (относительно времени наблюдателя t) событий. Отобразим пространство одновременных событий на R^3, а мировую линию наблюдателя — на пространство мнимых чисел, которое обозначим через $i\mathrm{R}^1$. В результате возникает новое отображение $\phi^t : W \to i\mathrm{R}^1 \times \mathrm{R}^3$, которое называется системой отсчета наблюдателя. Это отображение снабжает всякое событие $P \in W$ четырьмя числами $x_P = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ — его координатами. Соответственно мировая линия точки тела определяется четырьмя функциями: $x^0(t)$, $x^1(t)$, $x^2(t)$, $x^3(t)$. Они задают координаты точки тела в любой момент времени. Мировая линия наблюдателя по определению есть $\left(x^0(t), 0, 0, 0\right)$. При этом полагается, что $dx^0 = i\boldsymbol{s}dt$, где $i = \sqrt{-1}$, а $\boldsymbol{s}$ — фазовая скорость сигнала, с помощью которого проводятся наблюдения и измерения характеристик движения жидкости.

Такой прием, помимо того, что обеспечивает правильные знаки слагаемых в выражении для интервала между событиями, позволяет дать вполне осмысленную интерпретацию действительным и мнимым числам, а именно следующую. Поскольку события, связанные с наблюдателем, имеют вид $\left(x^0(t), 0, 0, 0\right)$, где $x^0(t) \in i\mathrm{R}^1$, на его мировой линии существует единственное событие, все координаты которого являются вещественными числами (0,0,0,0). Это событие соответствует моменту времени $t = 0$, которое естественно интерпретировать как *настоящее время наблюдателя*. Все остальные события наблюдателя связаны с мнимым временем $i \cdot t$, и потому не являются действительными, т. е. не происходят сейчас. Часть таких событий осталась в *прошлом*, а другая часть случится в *будущем*. Важно, что ни та, ни другая часть событий не является настоящим, т. е. реальным. Поэтому логично связать те события, для которых $t < 0$, с прошлым наблюдателя, а те, для которых $t > 0$, с будущим этого же наблюдателя. То же касается всех прочих событий: действительными (реальными) считаются только события, одновременные с настоящим временем наблюдателя ($t = 0$). Совокупность событий $\left(0, x^1(0), x^2(0), x^3(0)\right)$ образует границу между прошлым и будущим. Эти события суть настоящее.

Такова интерпретация точек пространства событий с позиции обсуждаемого наблюдателя. Любой иной наблюдатель будет интерпретировать ту же совокупность событий иначе, но и у него сохранится деление событий на прошлое, настоящее и будущее, и только события, относящиеся к его настоящему, будут описываться действительными числами, хотя сами события, вероятно, будут иными.

Надо сказать, что в случае классической механики и механики сплошных сред (т. е. в случае когда $\boldsymbol{s} = \infty$) указанная одновременность является абсолютной. Это означает, что множество событий, образующих прошлое (будущее) для какого-либо наблюдателя, является таковым и для всех прочих одновременных с ним наблюдателей. Соответственно, у всех таких наблюдателей настоящее совпадает. Однако при $\boldsymbol{s} < \infty$ (причинно-обусловленная теория) одновременность оказывается относительной, так как для разных наблюдателей пространства одновременных событий всегда различны. То же касается как прошлого, так и будущего, т. е. ни то, ни другое не является абсолютным, а у каждого наблюдателя они свои.

4.2. Физический смысл интегральных преобразований

Возможный подход к решению проблемы, описанной в п. 2.3, и лежащие в его основе мотивы иллюстрируются следующим примером, приведенным в [17].

Одномерное уравнение неразрывности и его «спектральный» аналог

Рассмотрим одномерное уравнение неразрывности. Здесь пространство событий W (т. е. пространство — время) является двумерным. Закон сохранения массы M тела записывается в виде

$$d_t M = 0. \tag{7}$$

Введя плотность массы $\rho(t, x)$, где t — время и x — пространственные декартовы координаты, запишем выражение для массы тела в виде

$$M(t) = \int_{x\in \mathrm{R}^1} \rho(t,x)dx. \tag{8}$$

Положение жидкого тела на R^1 определяется как условие $\rho > 0$, и эйлеровы координаты множества точек, удовлетворяющих этому условию, вообще говоря, зависят от времени: $x = x(t)$.

Та же величина в терминах, не зависящих от времени лагранжевых пространственных координат $X = x(t_0)$, где t_0 — некоторый отсчетный момент времени, может быть записана следующим образом:

$$M(t) = \int_{X\in \mathrm{R}^1} \rho(t, x(t,X))dx(t,X) = \int_X \rho(t,X)J(t,X)dX. \tag{9}$$

Здесь $\rho(t,X) \equiv \rho\big(t, x(t,X)\big)$, а $J(t,X) = \partial_X x$ — якобиан преобразования координат $(t,X) \mapsto (t,x)$, т. е. изменение элементарного объема в точке (t, x).

Запишем теперь с помощью преобразования Фурье плотности массы в подынтегральных выражениях (9) в виде

$$\rho(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k r(t,k) e^{ikx} dk, \quad \rho(t,X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_K \mathbf{r}(t,K) e^{iKX} dK, \tag{10}$$

где $r(t, k)$ и $\mathbf{r}(t, K)$ — Фурье-образы плотностей $\rho(t, x)$ и $\boldsymbol{\rho}(t, X)$, выраженных в терминах координат (t, k) и (t, K) соответственно.

Подставляя последнее выражение (10) в формулу (9), получаем:

$$M = \int_X \left(J(t,X) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_K \mathbf{r}(t,K) e^{iKX} dK \right) dX = \int_K \mathbf{r}(t,K) \Upsilon(t,K) dK. \qquad (11)$$

Здесь введено обозначение

$$\Upsilon(t,K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_X J(t,X) e^{iKX} dX,$$

которое интерпретируется аналогично с якобианом $J(t, X)$ как изменение элементарного объема в точке (t, k), т. е. как якобиан преобразования координат $(t,k) \mapsto (t,K)$, и в силу этого

$$\int_K \Upsilon(t,K) \mathbf{r}(t,K) dK = \int_k r(t,k) dk = M. \qquad (12)$$

Сравним выражения (8) и (12). Величина ρ — плотность массы, т. е. производная массы M по объему. Величина же r, очевидно, тоже плотность массы. Однако здесь в качестве меры, по которой вычисляется производная, выступает объем тела в области так называемых волновых чисел.

Рассмотрим снова закон сохранения (7). Подставив выражение (9) в уравнение (7), найдем:

$$d_t M = d_t \int_X \rho J \, dX = \int_x \frac{1}{J} d_t \left(\rho J \right) dx = 0. \qquad (13)$$

И, полагая подынтегральное выражение непрерывным, получим одномерное уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{J} d_t \left(\rho J \right) = \partial_t \rho + \partial_x \rho v = 0, \quad v \equiv d_t x. \qquad (14)$$

С другой стороны, подставив в уравнение (7) выражение (11), получим:

$$d_t M = d_t \int_K \Upsilon \mathbf{r} dK = \int_k \frac{1}{\Upsilon} d_t \left(r \Upsilon \right) dk = 0. \qquad (15)$$

Полагая и в выражении (15) непрерывность подынтегрального выражения, получим спектральный вариант того же уравнения неразрывности:

$$\frac{1}{\Upsilon} d_t \left(r \Upsilon \right) = \partial_t r + \partial_k r \nu = 0. \qquad (16)$$

Здесь $\nu \equiv d_t k$ интерпретируется как скорость изменения положения в пространстве (t, k).

Отметим в результате следующие обстоятельства.

1. Оба уравнения неразрывности — и (14), и (16) — соответствуют одному и тому же интегральному закону сохранения массы (7).

2. Оба уравнения неразрывности — и (14), и его «спектральный» аналог (16) — совпадают с точностью до обозначений.

Для того чтобы предложить метод исследования подобных задач, можно рассмотреть дискретные варианты уравнения неразрывности, его спектрального аналога и их взаимосвязь, как это было сделано, например, в [2, 17].

5. Заключение (обсуждение)

Каков итог и что представляется важным?

Средства описания

Введение в рассмотрение «физических чисел» объясняет кажущееся очевидным, но формально произвольное требование однородности уравнений по размерности. Важными представляются как четкое различение интегральных параметров и их плотностей, так и потенциальная возможность измерения первых и принципиальная невозможность измерения вторых.

Кроме того, в процессе подготовки статьи неожиданно выяснилось, что одна часто используемая в физике математическая конструкция — скалярное произведение — вызывает непонимание. Проанализируем это понятие и его использование.

По определению скалярное произведение есть билинейная числовая функция, заданная на элементах векторного пространства. Векторное же пространство определяется (я опускаю детали) как множество с введенными на его элементах операциями сложения элементов и умножения их на числа.

Между тем во многих физических работах фигурируют конструкции, называемые скалярными произведениями самых разнообразных величин и, очевидно, принадлежащих различным векторным пространствам. Как это понимать? Очень просто: либо такая конструкция не является скалярным произведением, как в случае с экспонентой в преобразовании Фурье, либо это «закамуфлированное» скалярное произведение, что является следствием его линейности. Размерные коэффициенты маскируют «настоящее», математическое скалярное произведение. Поясню, что все это означает.

Например, плотность кинетической энергии k определяется выражением

$$k \equiv \frac{1}{2}\rho\,|\vec{v}\,|^2 = \frac{1}{2}\rho(\vec{v},\vec{v}).$$

Квадрат модуля скорости, в свою очередь, определяется через скалярное произведение вектора скорости на себя. Здесь никакого противоречия с определением нет. Между тем, пользуясь линейностью, ту же величину можно записать иначе:

$$k = \frac{1}{2}\left(\rho\vec{v},\vec{v}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{m},\vec{v}\right),$$

где $\vec{m} \equiv \rho\vec{v}$ и называется, скажем, плотностью импульса. Здесь уже мы записали плотность кинетической энергии через скалярное произведение двух векторов, которые принадлежат разным векторным пространствам, имеют разную размерность и которые нельзя суммировать, ибо такая сумма будет лишена физического смысла. Однако легко видеть, что если дать себе труд вскрыть все физические наслоения и обнажить математическую основу, то противоречия определению скалярного произведения, скорее всего (как в данном примере), не обнаружится.

Модификация модели явления

Модификация уже построенной модели может нарушать порядок определения искомых функций, а также порядок возможной формулировки задачи модификации модели. Рассмотренная выше стандартная модификация готовой модели приводит к необходимости осреднять все искомые функции, что чрезвычайно усложняет задачу. Напротив, модификация, проводимая путем построения новой модели «с нуля», не маскирует этап, на котором возможна постановка задачи осреднения, что ведет к цели без ненужных усложнений.

Приведенную в качестве исходной модель вязкой жидкости, в свою очередь, саму можно рассматривать как модификацию модели идеальной жидкости. Несмотря на то что на первый взгляд способы получения этих моделей различны (в случае вязкой жидкости это переопределение тензора напряжений в терминах тензора скоростей деформации, а в случае турбулентной жидкости — осреднение уравнений модели среды), по существу они могут быть сведены к одной математической процедуре, которая многократно описывалась и обсуждалась (см., например, работы [10, 11] и др.). Эта процедура — осреднение, и приводит она к тому, что движение среды разделяется по масштабам на крупномасштабное и мелкомасштабное. Каждая модель явно воспроизводит крупномасштабную (в некотором, заранее оговоренном, смысле) часть движений жидкости, тогда как мелкомасштабная часть движений описывается параметрически. Соответственно уравнения обеих моделей должны, по замыслу, описывать осредненное движение точек среды вдоль сглаженных траекторий. Они это и делают.

Однако замечательно то, что хоть разделение по масштабам производится в обоих случаях, в первом случае модификация (модели идеальной жидкости) проводится корректно и затрагивает лишь поле скорости, в соответствии с которым вычисляются остальные характеристики среды. Во втором же случае стандартное разделение движений по масштабам, как было указано, производится некорректно со всеми вытекающими последствиями.

Результат осреднения уравнения неразрывности

Скорость, записанная в виде $\vec{v} = \bar{\bar{\vec{v}}} + \vec{v}'$, подставляется в уравнение неразрывности, и все уравнение осредняется:

$$\overline{\partial_t \rho + (\nabla, \rho(\bar{\bar{\vec{v}}} + \vec{v}'))} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t \bar{\rho} + (\nabla, \bar{\rho}\bar{\bar{\vec{v}}}) + (\nabla, \overline{\rho \vec{v}'}) = 0. \qquad (17)$$

Здесь, как и ранее, чертой сверху $\overline{(\cdot)}$ обозначен оператор осреднения. Величина $\bar{\rho}$ — плотность массы, соответствующая осредненному (крупномасштабному) полю скорости $\bar{\bar{\vec{v}}}$ при учете слагаемого $(\nabla, \overline{\rho \vec{v}'})$, описывающего диффузию плотности за счет мелкомасштабных флуктуаций скорости $\vec{v}'$ (см. [1]).

Следовательно, поле $\rho' = \rho - \bar{\rho}$ описывает отклонение поля плотности массы ρ, соответствующего полю скорости $\vec{v}$, от поля $\bar{\rho}$. Отсюда имеем

$$\overline{\rho\vec{v}'} = \overline{\left(\bar{\rho} + \rho'\right)\vec{v}'} = \overline{\rho'\vec{v}'}, \qquad (18)$$

где $\overline{\rho'\vec{v}'}$ — плотность диффузионного потока массы. Если для полученного слагаемого использовать градиентную гипотезу, то

$$\overline{\rho'\vec{v}'} \equiv -\mu_\rho \nabla\bar{\rho}. \qquad (19)$$

Здесь μ_ρ — коэффициент диффузии плотности массы.

Теперь уравнение (17) с учетом выражения (18) может быть записано в виде

$$\partial_t\bar{\rho} + \left(\nabla, \bar{\rho}\bar{\vec{v}}\right) + \left(\nabla, \overline{\rho'\vec{v}'}\right) = 0 \qquad (20)$$

либо

$$\delta_t\bar{\rho} + \bar{\rho}\left(\nabla, \bar{\vec{v}}\right) + \left(\nabla, \overline{\rho'\vec{v}'}\right) = 0, \qquad (21)$$

где $\delta_t(\cdot) \equiv \partial_t(\cdot) + (\bar{\vec{v}}, \nabla)(\cdot)$ отличается от $d_t(\cdot) = \partial_t(\cdot) + (\vec{v}, \nabla)(\cdot)$ скоростью переноса. С учетом (19) уравнение (20) запишется в виде уравнения диффузии плотности:

$$\partial_t\bar{\rho} + (\nabla, \bar{\rho}\vec{v}) = (\nabla, \mu_\rho \nabla\bar{\rho}). \qquad (22)$$

Если считать $\mu_\rho = \mathrm{const}$, то правая часть уравнения (22) равна $\mu_\rho \Delta\bar{\rho}$.

В стандартном случае классической гидромеханики диффузией плотности, как правило, пренебрегают, т. е. полагают $\overline{\rho'\vec{v}'} = 0$, и осредненное уравнение неразрывности записывают в виде

$$\partial_t\bar{\rho} + \left(\nabla, \bar{\rho}\bar{\vec{v}}\right) = 0 \text{ или } \delta_t\bar{\rho} + \bar{\rho}\left(\nabla, \bar{\vec{v}}\right) = 0. \qquad (23)$$

Уравнение (23) с точностью до обозначений совпадает с исходным уравнением неразрывности (см. табл. 2). Оно описывает поле плотности массы $\bar{\rho}$, соответствующее осредненному полю скорости $\bar{\vec{v}}$.

В общем случае поля плотности массы, соответствующие различным полям скорости, описываются следующими уравнениями неразрывности, представленными в табл 3.

Таблица 3

Плотность массы и уравнение неразрывности для различных полей скорости

Mass density and the continuity equation which correspond to different velocity fields

Скорость	Плотность	Уравнения неразрывности и условия несжимаемости		Учитываемые движения
$\vec{v}$	ρ	$d_t\rho + \rho(\nabla, \vec{v}) = 0$	$(\nabla, \vec{v}) = 0$	Все масштабы
$(\bar{\vec{v}} + \vec{v}')$	$\bar{\rho}$	$\delta_t\bar{\rho} + \bar{\rho}(\nabla, \bar{\vec{v}}) + (\nabla, \overline{\rho'\vec{v}'}) = 0$	$(\nabla, \bar{\vec{v}}) = 0$	Осредненные + диффузия
$\bar{\vec{v}}$	$\bar{\rho}$	$\delta_t\bar{\rho} + \bar{\rho}(\nabla, \bar{\vec{v}}) = 0$	$(\nabla, \bar{\vec{v}}) = 0$	Осредненные без диффузии

Из общих соображений следует, что наиболее адекватным является уравнение неразрывности, учитывающее диффузию массы. В настоящее время, однако, это уравнение редко используется в приложениях (пример использования можно найти в [18]). Вместе с тем нужно иметь в виду, что часто применяемое приближение несжимаемой жидкости связано с разными уравнениями — в зависимости от используемого уравнения неразрывности, и всем этим уравнениям соответствует своя плотность массы, как показано в табл. 3.

Что означает термин «несжимаемость среды»?

Обозначая через J якобиан преобразования лагранжевых переменных в эйлеровы, определим несжимаемость равенством $d_t J = 0$. Отсюда, пользуясь уравнением неразрывности, записанным в терминах лагранжевых координат $d_t(\rho J) = 0$, получим цепочку следствий:

$$d_t(\rho J)=0 \;\;\Rightarrow\;\; \frac{1}{J}d_t J=-\frac{1}{\rho}d_t\rho \;\;\overset{d_tJ=0}{\Rightarrow}\;\; \underbrace{d_t\rho=0}_{(a)} \;\;\Rightarrow\;\; \underbrace{(\nabla,\vec{v})=0}_{(б)}.$$

Оба выражения — (*а*) и (*б*) — являются признаками несжимаемости среды, записанными в терминах плотности массы и скорости. Поскольку движение далее разделяется по масштабам и уравнения осредняются, изменяется также и смысл плотности массы (изменяются уравнения, описывающие это свойство). Признаки несжимаемости в новых терминах запишутся иначе. Осреднив выражение (*б*) в вышеприведенной цепочке, получим вариант записи условия несжимаемости:

$$0=\overline{(\nabla,\vec{v})}=\overline{(\nabla,\vec{\bar{v}}+\vec{v}')}=(\nabla,\vec{\bar{v}}). \tag{24}$$

Из выражений (21) и (24) получим эквивалентное условие несжимаемости:

$$\delta_t\bar{\rho}+(\nabla,\overline{\rho'\vec{v}'})=0. \tag{25}$$

В свою очередь, если пренебречь диффузией плотности, т. е. положить $\overline{\rho'\vec{v}'}=0,$ то условие несжимаемости примет вид $\delta_t\bar{\rho}=0.$ Таким образом, стандартное условие несжимаемости эквивалентно бездивергентности поля скорости лишь в пренебрежении диффузией плотности. Если диффузия плотности принимается в расчет, то исходное условие несжимаемости в результате осреднения приводит к бездивергентному полю скорости сжимаемой жидкости (см. табл. 3).

Физический смысл этапов построения модели

Если обсуждается математическая модель физического явления, то наличие внятной физической интерпретации каждого этапа ее построения является необходимым признаком правильности проведенных рассуждений. Отсутствие такой интерпретации означает ошибку интерпретации либо текущего, либо какого-то из предыдущих этапов. Из двух приведенных примеров первый (см. п. 4.1) выглядит наиболее очевидным: все, что происходит не сейчас, не может считаться реальным. Второй пример (см. п. 4.2) не столь очевиден. Однако если предварительно рассмотреть дискретный аналог, как это было сделано в [2, 17], то интерпретация интегральных преобразований как замены базисных векторов соответствующего векторного пространства напрашивается (см., например, [19]). Тем более что такая интерпретация позволяет непротиворечиво истолковать конструкции в показателе экспоненты многомерного преобразования Фурье.

Благодарности

Я благодарен коллегам Н.Е. Вольцингеру и А.Я. Гольмштоку за полезные дискуссии и критику.

Работа выполнена в рамках темы № 0149-2019-0015 Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН.

Acknowledgments

I am grateful to my colleagues Dr. A. Holmstock and N. Volzinger for helpful discussions and valuable comments.

This research was carried out in the framework of the theme 0149-2019-0015 of the Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

Список литературы

1. *Белевич М.Ю.* Связь уравнений неразрывности и диффузии плотности // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2016. Т. 9, № 1. С. 73—82.
2. *Belevich M*. On physical limitations of mathematical constructions used in mathematical models // Pramana – J. Phys. 2019. 93: 33. https://doi.org/10.1007/s12043-019-1788-1
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
4. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1 / Пер. с франц. М., Мир, 1972. 824 с.
5. *Захаров В.Е.* Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ. 1968. № 2. С. 86—94.
6. *Юэн Г., Лейк Б*. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде / Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 179 с.
7. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. Т. 1 / Пер. с англ. М., Мир, 1982, 488 с.
8. *Bochner S.*, *Chandrasekharan K.* Fourier transforms. Princeton Univ. Press, 1949.
9. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968.
10. *Хинце И.О*. Турбулентность, ее механизм и теория / Пер. с англ. М., Физматгиз, 1963. 680 с.
11. *Монин А.С.*, *Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч.1. М.: Наука, 1965. 641 с.
12. *Трусделл К*. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред / Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
13. *Серрин Дж*. Математические основы классической механики жидкости / Пер. с англ. М.: ИЛ, 1963.
14. *Шутц Б*. Геометрические методы математической физики / Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 304 с.
15. *Паули В*. Теория относительности / Пер. с англ. М.: Наука, 1991. 328 с.
16. *Belevich M.* Causal description of non-relativistic dissipative fluid motion // Acta Mechanica. 2003. V. 161 P. 65–80. https://doi.org/10.1007/s00707-002-0983-0
17. *Белевич М.Ю.* О спектральной форме уравнений гидромеханики // Ученые записки РГГМУ. 2014. № 37. С. 44—53; 2015. № 38. С. 59—65; 2015. № 40. С. 81—95.

18. *Елизарова Т.Г., Шеретов Ю.В.* Теоретическое и численное исследование квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41, № 2. С. 239—255.
19. *Wolf K.* Integral Transforms in Science and Engineering. Plenum Press, 1979.

References

1. *Belevich M.Yu.* Relationship between the continuity equation and the mass density diffusion equation. *Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika.* Fundamental and applied hydrophysics, 2016, 1(9):73–82. [In Russian].
2. *Belevich M*. On physical limitations of mathematical constructions used in mathematical models. Pramana – J. Phys., 2019, 93: 33. https://doi.org/10.1007/s12043-019-1788-1
3. *Kolmogorov A.N. and S.V. Fomin.* Introductory Real Analysis. New York, Dover Publications, 1975.
4. *Schwartz L*. Analyse Mathematique. V. 1. Hermann, 1967.
5. *Zakharov V.E.* Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. J. Appl. Mech.Tech. Phys., 1972, 9(2): 190–194.
6. *Yuen H.C. and B.M.Lake.* Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves. Advances in Applied Mechanics,1982, 22: 67–229.
7. *Richtmyer, R.D.* Principles of Advanced Mathematical Physics, vol.1. Springer-Verlag N.Y. 1978.
8. *Bochner S.*, *Chandrasekharan K.* Fourier transforms. Princeton Univ.Press, 1949.
9. *Kurosh A.G.* Lectures on General Algebra. New York, 1963, 335 p.
10. *Hinze J.O.* Turbulence. An Introduction to its mechanism and theory. McGraw-Hill N.Y. 1959.
11. *Monin A.S. and A.M. Yaglom*. Statistical Fluid Mechanics. V. 1. MIT Press, Cambridge, 1971.
12. *Truesdell C.* First Course in Rational Continuum Mechanics. Academic Press, 1977.
13. *Serrin J.* Mathematical principles of classical fluid mechanics. Handbuch der Physik, Bd VIII/1. Springer Verlag, 1959: 125–263.
14. *Schutz, B.F.* Geometrical Methods of Mathematical Physics. Cambridge: Cambridge University Press 1980. 250 p.
15. *Pauli W.* Theory of relativity. New York: Pergamon, 1958.
16. *Belevich M.* Causal description of non-relativistic dissipative fluid motion, Acta Mechanica. 2003, 161: 65–80. https://doi.org/10.1007/s00707-002-0983-0
17. *Belevich M.* On the spectral form of the Fluid Mechanics equations. Uchonye Zapiski RGGMU, 2014, 37: 44–53; 2015, 38: 59–65; 2015, 40: 81–95 [in Russian].
18. *Elizarova T.G. and Sheretov Yu.V.* Theoretical and numerical investigation of quasigasdynamic and quasihydrodynamic equations. J. of Comput. Mathem. and Mathem. Phys. 2001, 41: 219–234.
19. *Wolf K.* Integral Transforms in Science and Engineering. Plenum Press, 1979.

Статья поступила 28.02.2020
Принята после доработки к публикации 06.05.2020

Информация об авторе

Белевич Михаил Юрьевич, канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института океанологии РАН им. П.П. Ширшова, доцент кафедры прикладной океанографии Российского государственного гидрометеорологического университета; e-mail: mbelevich@ioras.nw.ru, mbelevich@yahoo.com

Information about the author

Belevich Michael, PhD, Leading Research Associate, Shirshov Institute of Oceanology RAS, Lab. of Geophys. Boundary Layers; Associate Professor, Russian State Hydrometeorological University, Chair of Applied Oceanography.